

线性方程组习题课

张彪

天津师范大学

数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

课程主页: <https://zhangbiaomath.github.io/teaching/gaodai.html>



题目目录

例 1: 求解线性方程组	第 2 页 →
例 2: 极大线性无关组与秩	第 4 页 →
例 3: 矩阵的秩	第 6 页 →
例 4: 含参方程组的有解条件	第 8 页 →
例 5: 齐次方程组与行列式	第 10 页 →
例 6: 五元方程组的有解判定	第 12 页 →
例 7: 方程组的通解	第 14 页 →
例 8: 同解方程组	第 17 页 →
例 9: 已知两个解求通解	第 19 页 →
例 10: 解的线性无关性与参数	第 21 页 →

例 1

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$



例 1

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

解 将其写成增广矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

对应的线性方程组为
$$\begin{cases} x_1 - x_4 = \frac{3}{2}, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$
 其一般解为
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + x_4, \\ x_2 = -x_4, \\ x_3 = -\frac{1}{2} - x_4, \end{cases}$$
 其中 x_4 为自由未知量.

其全部解为

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \text{ 为任意数}.$$

例 2

求向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0, 1)$, $\alpha_4 = (1, 1, 0, 2)$ 的一个极大线性无关组与秩.



解 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 作为列向量构造矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

并对 A 进行一系列行的初等变换将其化为行简化的阶梯形矩阵.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

易知 B 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的一个极大无关组为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 故其秩为 3.

例 3

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的秩.



解 对 A 进行一系列行的初等变换将其化为行简化的阶梯形矩阵.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

易知 B 的秩为 3, 那么 A 的秩也是 3.



例 4

问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有解, 并求解.



解 (1) 当

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1) \neq 0$$

即 $b \neq 0$, $a \neq 1$ 时, 由 Cramer 法则得唯一解:

$$x_1 = \frac{2b-1}{b(a-1)}, \quad x_2 = \frac{1}{b}, \quad x_3 = \frac{2ba-4b+1}{b(a-1)}.$$

(2) $a = 1$ 时, 经化简可得: 当 $b = \frac{1}{2}$, 有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3, \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

当 $b \neq \frac{1}{2}$ 时无解.

(3) $b = 0$ 时, 方程组无解.

例 5

设 B 是一个三级非零矩阵, 它的每一列都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解, 求 λ 的值及 $|B|$.



解 因为 B 是非零矩阵, 所以 B 中至少有一个非零列向量. 因此, 齐次线性方程组有非零解, 从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(\lambda - 1) = 0,$$

得 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 系数矩阵的秩为 2, 基础解系只含有一个解向量.

因此 B 的三个列向量必定线性相关, 即 B 的秩小于 3, 故 $|B| = 0$.



例 6

判定线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 + bx_5 = ka, \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 + bx_4 + ax_5 = ka, \\ ax_1 + ax_2 + bx_3 + ax_4 + ax_5 = ka, \\ ax_1 + bx_2 + ax_3 + ax_4 + ax_5 = ka, \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 + ax_5 = kb, \end{cases}$$

(其中 $a \neq b$, $4a + b \neq 0$, $k \neq 0$) 是否有解? 如有解, 求出它的解.

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a & b \\ a & a & a & b & a \\ a & a & b & a & a \\ a & b & a & a & a \\ b & a & a & a & a \end{vmatrix} = (4a+b) \begin{vmatrix} a & a & a & a & 1 \\ a & a & a & b & 1 \\ a & a & b & a & 1 \\ a & b & a & a & 1 \\ b & a & a & a & 1 \end{vmatrix} = (4a+b) \begin{vmatrix} a & a & a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4a+b)(b-a)^4(-1)^{\tau(54321)} = (b-a)^4(4a+b) \neq 0,$$

所以, 由 Cramer 法则, 线性方程组有唯一解.

又

$$D_1 = k(b-a)^4(4a+b), \quad D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = 0,$$

故

$$x_1 = k, \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

例 7

求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

的全部解（通解）.



解 因为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以原线性方程组与

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

同解, 一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

其中 x_2, x_4 为自由未知量.

(*) 的导出组为齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$

其一般解为 $\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ 其中 x_2, x_4 为自由未知量.

容易得出 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为线性方程组 (*) 的一个特解,

而 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为其导出组的一个基础解系, 那么 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ 为导出组的全部解 (通解).

故原方程组的全部解 (通解) 为

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2,$$

其中 k_1, k_2 为任意数.

例 8

已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = -1 \end{cases}$$

有解且同解, 求 a, b, c 的值.

解 因为两个线性方程组都有解且同解, 而第二个方程组有两个方程, 三个未知量, 所以它们都有无穷多解, 那么它们的系数矩阵的秩都小于 3.

显然第一个方程组的系数矩阵中第一、二两行不成比例, 从而它的秩为 2, 即第一个方程组与

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \text{ 同解, 故其一般解为 } \begin{cases} x_1 = -1 - x_3, \\ x_2 = 1 - x_3, \end{cases} \text{ 其中 } x_3 \text{ 是自由未知量.}$$

令 $x_3 = t$, 将一般解 $(-1 - t, 1 - t, t)$ 代入第一个方程组的第三式及第二个方程组的第一式, 得

$$b - 1 + (c - b - 1)t = 0, \quad (a - 2)t = 0.$$

因为 t 可取任意值, 所以 $b = 1, c = 2, a = 2$.

反之, 当 $(a, b, c) = (2, 1, 2)$ 时, 两个方程组均等价于 $x_1 + x_3 = -1, x_2 + x_3 = 1$, 因而有解且同解. 故所求参数为 $a = 2, b = 1, c = 2$.

例 9

已知 $X_1 = (1/3, -2/3, 0)$, $X_2 = (-1/3, -1/3, 1)$ 是线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ sx_1 + tx_2 + px_3 = q \end{cases}$$

的两个解, 求解这个线性方程组.

解 因为 $X_1 = (1/3, -2/3, 0)$, $X_2 = (-1/3, -1/3, 1)$ 都是线性方程组的解, 那么线性方程组的增广矩阵和系数矩阵的秩相等且都不超过 2, 但是线性方程组的系数矩阵的前两行已经不成比例, 所以第三行必定可以由前两行线性表示, 从而原线性方程组与

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

同解. 令 $\eta = X_1 - X_2 = (2/3, -1/3, -1)$, 则 $X_1 + k\eta$ 就是线性方程组的通解, 其中 k 可取任意值.



例 10

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = -3 \end{cases}$$

有三个线性无关的解, 求 a, b 的值及方程组的通解.

解 对增广矩阵做行的初等变换, 可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & -3-a \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & -8+4a \end{pmatrix}.$$

由于方程组有三个线性无关的解, 那么增广矩阵的秩等于 2, 从而可得

$$\begin{cases} 4-2a=0, \\ b+4a-5=0, \\ -8+4a=0, \end{cases}$$

所以 $a=2, b=-3$.

方程组与

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 4x_4 = -4, \\ -x_2 + x_3 - 5x_4 = -5, \end{cases}$$

同解, 其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -4 - 2x_3 + 4x_4, \\ x_2 = 5 + x_3 - 5x_4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 是一组自由未知量. 令 $x_3 = x_4 = 0$, 得一个特解

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其导出组与

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

同解.

分别令 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 以及 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 可得导出组的基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

那么方程组的通解为 $\eta = \eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 k_1, k_2 可取任意值.