第二章　行列式

张彪

天津师范大学

数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

目录

《九章算术 · 方程》是世界上最早系统讨论联立方程问题的文献.

《九章算术 · 方程》，成于公元一世纪左右，西汉张苍、耿寿昌整理的算学书

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗.
问上、中、下禾实一秉各几何？

我们设上禾、中禾、下禾一秉分别为 x, y, z 斗，则有

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

行列式的概念起源于求解线性方程组.

引例：鸡兔同笼

一个笼子中有鸡和兔共 8 只，二者共有 22 条腿，那么鸡和兔各有多少只？

解 利用二元一次方程组来求解. 设鸡有 x_1 只，兔有 x_2 只，那么

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 = 22. \end{cases}$$

解得

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

因此，笼中有鸡 5 只，兔 3 只.

例

解如下方程组

$$
\text{(I)} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}
$$

例

解如下方程组

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}
$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$（如果等于 0，又如何？）时，此方程组有唯一解，即

$$
x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.
$$

你发现什么规律了吗？

对于二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，我们称 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式，用符号表示为

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

于是上述解可以用二阶行列式叙述为:

当二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} {\color{blue}b_1} & a_{12} \\ {\color{blue}b_2} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & {\color{blue}b_1} \\ a_{21} & {\color{blue}b_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

二阶行列式实际是按对角线定义的：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

其中，红线 对应正号，蓝线 对应负号.

- 记方程组 (I) 的系数矩阵为 A，其行列式 $\det A$ 称为 (I) 的 系数行列式，
- 将 A 的第一列（x_1 对应的列）替换为常数列所得的矩阵记作 A_1，
- 将 A 的第二列（x_2 对应的列）替换为常数列所得的矩阵记作 A_2.

那么可见，

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}. \qquad \text{（Cramer 法则）}$$

我们希望对所有方阵定义行列式，使得 Cramer 法则对所有形似 (I) 的方程组成立

求解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

求解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

设 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$ (这个假定是合理的. 为什么?)

将 x_1 看作常数, 在后两个方程中利用上面的公式可得

求解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

设 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. (这个假定是合理的. 为什么?)

将 x_1 看作常数, 在后两个方程中利用上面的公式可得

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

代入第一个方程解得

$$x_1 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}.$$

进一步可解得 x_2, x_3.

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

当 $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, = x_2 = \frac{d_2}{d}, x_3 = \frac{d_3}{d},$$

其中

$$d_1 = \begin{vmatrix} \color{blue}{b_1} & a_{12} & a_{13} \\ \color{blue}{b_2} & a_{22} & a_{23} \\ \color{blue}{b_3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \color{blue}{b_1} & a_{13} \\ a_{21} & \color{blue}{b_2} & a_{23} \\ a_{31} & \color{blue}{b_3} & a_{33} \end{vmatrix}, \ d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \color{blue}{b_2} \\ a_{31} & a_{32} & \color{blue}{b_3} \end{vmatrix}.$$

在数学软件 Mathematica 中可以使用一条命令实现.

```
In[46]:= Solve[{a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 == b_1,
         解方程
            a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{2,3} x_3 == b_2,
            a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + a_{3,3} x_3 == b_3}, {x_1, x_2, x_3}] // Simplify // Factor
                                                                  化简          因式分解
```

Out[46]=

$$\left\{\left\{x_1 \to \frac{b_3 a_{1,3} a_{2,2} - b_3 a_{1,2} a_{2,3} - b_2 a_{1,3} a_{3,2} + b_1 a_{2,3} a_{3,2} + b_2 a_{1,2} a_{3,3} - b_1 a_{2,2} a_{3,3}}{a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} - a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} + a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}},\right.\right.$$

$$x_2 \to \frac{b_3 a_{1,3} a_{2,1} - b_3 a_{1,1} a_{2,3} - b_2 a_{1,3} a_{3,1} + b_1 a_{2,3} a_{3,1} + b_2 a_{1,1} a_{3,3} - b_1 a_{2,1} a_{3,3}}{-a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} + a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}},$$

$$\left.\left.x_3 \to \frac{b_3 a_{1,2} a_{2,1} - b_3 a_{1,1} a_{2,2} - b_2 a_{1,2} a_{3,1} + b_1 a_{2,2} a_{3,1} + b_2 a_{1,1} a_{3,2} - b_1 a_{2,1} a_{3,2}}{a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} - a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} + a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}}\right\}\right\}$$

类似地，我们可以使用 **对角线法则** 定义三阶行列式：

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right.\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

于是，我们可以定义三阶行列式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) 项数：2 阶行列式含 2 项，3 阶行列式含 6 项，这恰好就是 $2!, 3!$.

(2) 每项构成：2 阶和 3 阶行列式的每项分别是位不同行不同列的 2 个和 3 个元素的乘积

(3) 各项符号：2 阶行列式含 2 项，其中 1 正 1 负，3 阶行列式 6 项，3 正 3 负.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

思考：1) 如何从排列的角度定义 4 阶行列式?

2) 如何递推地从 3 阶行列式定义 4 阶行列式 ?

- 行列式 (determinant) 和矩阵 (matrix) 的概念最早都是伴随着方程组的求解而发展起来的.
- 在中国古代数学著作《九章算术》中, 已经出现过用矩阵形式表示线性方程组 (system of linear equations) 的系数以解方程组的图例, 这可以算是矩阵的雏形.
- 矩阵正式作为数学中的研究对象出现则是在行列式的研究发展起来之后.

  逻辑上讲, 矩阵的概念先于行列式, 但实际的历史则恰好相反,
- 17 世纪晚期, 关孝和与莱布尼茨的著作已使用行列式来确定线性方程组解的个数及形式.
- 18 世纪以后, 行列式开始作为独立的数学概念被研究.
- 进入 19 世纪后, 行列式的研究进一步发展, 矩阵的概念也应运而生.

  柯西在 1812 年首先将 “determinant” 一词用来表示 18 世纪出现的行列式, 他也是最早将行列式排成方阵并将其元素用双重下标表示的数学家 (垂直线记法是凯莱在 1841 年率先使用的).
- 现代的行列式概念最早在 19 世纪末传入中国, 而矩阵的概念最早于 1922 年见于中文.

  1935 年, 中国数学会审查各种术语译名, 正式将 “determinant” 的译名定为 “行列式”, 而将 “matrix” 首次译为 “矩阵”.

§2 排列

为了定义 n 阶行列式，我们首先讨论 n 阶排列.

定义

由 $1, 2, 3, \cdots, n$ 这 n 个数字所组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列，记为 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

如 2431 是一个 4 阶排列，132 是一个 3 阶排列.

2 阶排列有 $2!$ 个： $12, 21.$

3 阶排列有 $3!$ 个： $123, 132, 321, 213, 231, 312.$

由 $1, 2, \cdots, n$ 所组成的 n 阶排列共有 $n!$ 个.

排列的逆序数

定义

- 在一个排列中，若一个较大的数字排在某个较小的数字的前面，就称这两数字构成一个逆序.
- 一个排列中所出现的逆序的总和称为此排列的逆序数，记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

如 4123 中，4 与 1，4 与 2，4 与 3 均构成逆序，故 $\tau(4123) = 3$.

例 1

求排列 451362 的逆序数.

例 2

求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

例 3

求排列 $2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n$ 的逆序数.

例 1

求排列 451362 的逆序数.

解 $\tau(451362) = 3 + 3 + 0 + 2 + 1 + 0 = 9.$

例 2

求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

例 3

求排列 $2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n$ 的逆序数.

例 1

求排列 451362 的逆序数.

解 $\tau(451362) = 3 + 3 + 0 + 2 + 1 + 0 = 9.$

例 2

求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = n - 1 + n - 2 + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}.$

例 3

求排列 $2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n$ 的逆序数.

例 1

求排列 451362 的逆序数.

解 $\tau(451362) = 3+3+0+2+1+0 = 9.$

例 2

求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = n-1+n-2+\cdots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}.$

例 3

求排列 $2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n$ 的逆序数.

解

$$\begin{aligned}\tau(2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n) &= n\cdot n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1\\ &= n^2+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.\end{aligned}$$

定义

- 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，
- 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

3 阶排列

偶排列

- 123（逆序数 0）
- 312（逆序数 2： 31, 32）
- 231（逆序数 2： 21, 31）

奇排列

- 132（逆序数 1： 32）
- 213（逆序数 1： 21）
- 321（逆序数 3： 32, 31, 21）

所有 3 阶排列共 $3! = 6$ 个，奇偶各半.

例如，4321 为一个偶排列, 643521 是一个奇排列.

定义

如果把一个排列中某两个数字 i, j 交换位置，而其它数字保持不动，这样就得到一个新的排列，称为对原排列做了一个**对换**，记作 (i, j).

定义

如果把一个排列中某两个数字 i, j 交换位置，而其它数字保持不动，这样就得到一个新的排列，称为对原排列做了一个**对换**，记作 (i, j).

从偶排列出发

123 **的对换**:

- $(1,2)$: $123 \to 213$
- $(2,3)$: $123 \to 132$
- $(1,3)$: $123 \to 321$

312 **的对换**:

- $(1,2)$: $312 \to 132$
- $(2,3)$: $312 \to 321$
- $(1,3)$: $312 \to 123$

从奇排列出发

132 **的对换**:

- $(1,2)$: $132 \to 231$
- $(2,3)$: $132 \to 123$
- $(1,3)$: $132 \to 312$

213 **的对换**:

- $(1,2)$: $213 \to 123$
- $(2,3)$: $213 \to 231$
- $(1,3)$: $213 \to 312$

定理 1

对换改变排列的奇偶性.

定理 1

对换改变排列的奇偶性.

证明 (1) 参加对换的数字位于相邻的位置. 设排列

$$\overset{A}{\cdots}\ \ i\ \ j\ \ \overset{B}{\cdots} \tag{1}$$

经过对换 (i, j) 变为

$$\overset{A}{\cdots}\ \ j\ \ i\ \ \overset{B}{\cdots} \tag{2}$$

其中 A, B 表示不动的数字.

由排列 (1) 变为排列 (2), A, B 这些数字的逆序数没有改变,

i, j 与 A, B 这些数字的逆序数也没有改变, 不同的是 i 与 j 的次序.

- 若 $i > j$, 则 (1) 中 i, j 构成逆序, (1) 中逆序比 (2) 多一个;
- 若 $i < j$, 则 (2) 中 i, j 构成逆序, (2) 中逆序比 (1) 多一个.

无论哪种情况, 排列的奇偶性总要改变.

(2) 参加对换的数字不相邻. 设排列

$$\cdots \ i \ k_1 \ \cdots \ k_s \ j \ \cdots \tag{3}$$

经过对换 (i,j) 变为

$$\cdots \ j \ k_1 \ \cdots \ k_s \ i \ \cdots \tag{4}$$

(2) 参加对换的数字不相邻. 设排列

$$\cdots \; i \; k_1 \; \cdots \; k_s \; j \; \cdots \tag{3}$$

经过对换 (i, j) 变为

$$\cdots \; j \; k_1 \; \cdots \; k_s \; i \; \cdots \tag{4}$$

这样的对换可通过一系列相邻数字的对换来实现:

(2) 参加对换的数字不相邻. 设排列

$$\cdots \; i \; k_1 \; \cdots \; k_s \; j \; \cdots \qquad (3)$$

经过对换 (i,j) 变为

$$\cdots \; j \; k_1 \; \cdots \; k_s \; i \; \cdots \qquad (4)$$

这样的对换可通过一系列相邻数字的对换来实现:

- 先将 i 向右移动, 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 交换位置, 经过 s 次相邻数字的对换后, (3) 变为

$$\cdots \; k_1 \; k_2 \; \cdots \; k_s \; i \; j \; \cdots \qquad (3)'$$

(2) 参加对换的数字不相邻. 设排列

$$\cdots \ i \ k_1 \ \cdots \ k_s \ j \ \cdots \qquad (3)$$

经过对换 (i,j) 变为

$$\cdots \ j \ k_1 \ \cdots \ k_s \ i \ \cdots \qquad (4)$$

这样的对换可通过一系列相邻数字的对换来实现:

- 先将 i 向右移动, 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 交换位置, 经过 s 次相邻数字的对换后, (3) 变为

$$\cdots \ k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_s \ i \ j \ \cdots \qquad (3)'$$

- 再将 j 向左移动, 依次与 $i, k_s, \cdots, k_2, k_1$ 交换位置, 经过 $s+1$ 次相邻数字的对换, $(3)'$ 变为 (4).

故对换 (i,j) 将 (3) 变为 (4) 相当于施行了 $2s+1$ 次相邻数字的对换.

(2) 参加对换的数字不相邻. 设排列

$$\cdots \ i \ k_1 \ \cdots \ k_s \ j \ \cdots \qquad (3)$$

经过对换 (i, j) 变为

$$\cdots \ j \ k_1 \ \cdots \ k_s \ i \ \cdots \qquad (4)$$

这样的对换可通过一系列相邻数字的对换来实现:

- 先将 i 向右移动, 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 交换位置, 经过 s 次相邻数字的对换后, (3) 变为

$$\cdots \ k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_s \ i \ j \ \cdots \qquad (3)'$$

- 再将 j 向左移动, 依次与 $i, k_s, \cdots, k_2, k_1$ 交换位置, 经过 $s+1$ 次相邻数字的对换, $(3)'$ 变为 (4).

故对换 (i, j) 将 (3) 变为 (4) 相当于施行了 $2s+1$ 次相邻数字的对换. 由 (1) 的证明得知, 每经过一次相邻数字的对换, 排列的奇偶性就要改变, 而 $2s+1$ 为奇数, 经过奇数次这样的对换, 排列的奇偶性必定改变, 所以 (3) 与 (4) 的奇偶性相反. ∎

排列的逆序数

推论

当 $n \geq 2$ 时, 所有 n 阶排列中奇排列与偶排列的个数相等, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

推论

当 $n \geq 2$ 时, 所有 n 阶排列中奇排列与偶排列的个数相等, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　设全部 n 阶排列中奇排列个数为 s，偶排列个数为 t.

将 s 个奇排列中的前两个数字对换，每个奇排列变为一个偶排列，得到 s 个不同的偶排列，因此 $s \leq t$.

同理可得 $t \leq s$，故 $s = t = \dfrac{n!}{2}$. ∎

定理 2

- 任意一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与排列 $12\cdots n$ 可通过一系列对换互变，
- 且对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

所有 3 阶排列通过对换互连

$$123 \xrightarrow{(2,3)} 132 \xrightarrow{(1,2)} 231 \xrightarrow{(2,3)} 321 \xrightarrow{(1,2)} 312 \xrightarrow{(2,3)} 213 \xrightarrow{(1,2)} 123$$

定理 2

- 任意一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与排列 $12\cdots n$ 可通过一系列对换互变,
- 且对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

证明　对排列的阶数 n 作数学归纳法. $n=1$ 时, 1 阶排列只有一个 1, 结论显然成立.

归纳假设: 假设定理对 $n-1$ 阶排列成立.

归纳步骤: 考虑任意 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

- 若 $j_n=n$, 则由归纳假设, $n-1$ 阶排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经对换变为 $12\cdots(n-1)$, 从而原排列变为 $12\cdots n$.
- 若 $j_n\neq n$, 则先作对换 (j_n,n), 得排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}n$, 转化为上一情形.
  标准排列 $12\cdots n$ 是偶排列, 由定理 1 知对换改变排列的奇偶性,
  故所作对换个数与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 同奇偶.

§3 n 阶行列式

- 如何递推地从 2 阶行列式定义 3 阶行列式？

§3 n 阶行列式

- 如何递推地从 2 阶行列式定义 3 阶行列式？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

由于二阶行列式已有确定定义，因而三阶行列式也就完全可用上述等式右边的式子来定义，这样定义的结果和曾经有的对角线法则定义是一致的.

- 如何递推地从 3 阶行列式定义 4 阶行列式？
- 如何递推地从 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式？

仿照这样，我们可以用三阶行列式来给出四阶行列式的定义：用四个三阶行列式分别与四个数相乘积的代数和，就叫做一个四阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

这种用低一阶的行列式来定义高一阶行列式的方法更有普遍性.

在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列,
剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置, 构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij}.

行列式的递归定义

数域 P 上的一阶方阵 $A=(a_{11})$ 阶方阵的行列式定义为 a_{11}, 则 n 阶方阵 A 的行列式定义为

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j},$$

其中 M_{1j} 是划去 A 的第 1 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶方阵的行列式, 称为 a_{1j} 的余子式.

行列式的完全展开定义（课本上的定义）

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 则 n 阶方阵 A 的行列式为

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

求和取遍 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$.

通常，方阵 A 的行列式记为 $|A|$ 或 $\det A$.

$\Rightarrow$ 当 $|A|$ 为一阶、二阶行列式时, 结论显然成立.

假设 $|A|$ 为 $n-1$ 阶时结论成立.

当 $|A|$ 为 n 阶行列式时由定义可得

$$|A| = \sum_{j_1=1}^{n} (-1)^{1+j_1} a_{1j_1} M_{1j_1}$$

利用归纳假设 $M_{1j_1} = ?$

$\Rightarrow$ 当 $|A|$ 为一阶、二阶行列式时, 结论显然成立.

假设 $|A|$ 为 $n-1$ 阶时结论成立.

当 $|A|$ 为 n 阶行列式时由定义可得

$$|A| = \sum_{j_1=1}^{n} (-1)^{1+j_1} a_{1j_1} M_{1j_1}$$

利用归纳假设可得

$$\begin{aligned} M_{1j_1} &= \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j_1-1} & a_{2,j_1+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j_1-1} & a_{n,j_1+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \end{aligned}$$

其中求和取遍 $\{1, \cdots, j_1-1, j_1+1, \cdots, n\}$ 的所有排列 $j_2 \cdots j_n$.

因而

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j_1=1}^{n} (-1)^{j_1+1} a_{1j_1} \sum_{j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{j_1+1+\tau(j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.
\end{aligned}
$$

由于 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列, 则其中与 j_1 相关的逆序有 $j_1 - 1$ 个, 其他的逆序恰好是排列 $j_2, \cdots, j_n$ 中的所有逆序. 因此 $\tau(j_1 j_2\cdots j_n) = j_1 - 1 + \tau(j_2\cdots j_n)$. 于是

$$
|A| = \sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.
$$

因而

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{j_1=1}^{n}(-1)^{j_1+1}a_{1j_1}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{j_1+1+\tau(j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.\end{aligned}$$

由于 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列, 则其中与 j_1 相关的逆序有 j_1-1 个, 其他的逆序恰好是排列 $j_2,\cdots,j_n$ 中的所有逆序. 因此 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_1-1+\tau(j_2\cdots j_n)$. 于是

$$|A| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

$\Leftarrow$ §6 再来讨论.

定义

用符号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式指的是 $n!$ 项的代数和,

- 这些项是取自 D_n 的位于不同行、不同列的所有可能的 n 个元素的乘积;
- 一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的行标为自然排列时,列标排列的奇偶性决定该项的符号,
- 即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时该项取正号,是奇排列时该项取负号.

D_n 可以写成

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

由定义可知, 计算行列式要按以下两步进行:

(1) 作出位于不同行、不同列的 n 个元素的所有可能的乘积;

(2) 每一项的行标按自然顺序排列时, 符号由列标排列的奇偶性所决定.

主对角线以下的元素全为零的矩阵叫**上三角形矩阵**，
主对角线以上的元素全为零的矩阵叫**下三角形矩阵**. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

分别为一个上三角形矩阵和下三角形矩阵.

例 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

主对角线以下的元素全为零的矩阵叫**上三角形矩阵**，
主对角线以上的元素全为零的矩阵叫**下三角形矩阵**．例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

分别为一个上三角形矩阵和下三角形矩阵．

例 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角形行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$

$\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性分析

观察： n 和 $n-1$ 是连续的两个整数，因此：

- 其中必有一个是偶数
- 另一个是奇数

设偶数为 $2k$，则：

$$n(n-1) = (\text{奇数}) \times (\text{偶数}) = (\text{奇数}) \times 2k$$

要使 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为整数，需要再除以 2.

关键： $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性取决于 $n(n-1)$ 是否能被 4 整除.

$\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性分析

分析：奇偶性取决于 $n(n-1)$ 能否被 4 整除.

按 $n \bmod 4$ 分类：

- $n \equiv 0$：$n = 4k$，$T(n) = 2k(4k-1)$ **偶**
- $n \equiv 1$：$n = 4k+1$，$T(n) = 2k(4k+1)$ **偶**
- $n \equiv 2$：$n = 4k+2$，$T(n) = (2k+1)(4k+1)$ **奇**
- $n \equiv 3$：$n = 4k+3$，$T(n) = (4k+3)(2k+1)$ **奇**

结论：

$$T(n) = \frac{n(n-1)}{2} \begin{cases} \text{偶数}, & n \equiv 0,1 \pmod 4 \\ \text{奇数}, & n \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

符号规律的推广

n 阶行列式定义中要求，将展开式中每一项的元素按行下标的自然顺序排列起来，再决定其符号．但数的乘法是可交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意排列的．一般地，

命题

n 阶行列式中的项可以写成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$, (1)

其中 $i_1i_2\cdots i_n, j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列，则 (1) 的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}. \tag{2}$$

证明　事实上，将 (1) 中这 n 个元素重新排列一下，使得它们的行指标成自然顺序，即得

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}, \tag{3}$$

它的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}. \tag{4}$$

- 4 阶行列式中项 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 的符号是什么?
- 5 阶行列式中项 $a_{15}a_{23}a_{42}a_{34}a_{51}$ 的符号是什么?

下证 (2) 与 (4) 一致:

- 因为由 (1) 变为 (3) 可以经过一系列元素的交换来实现,
- 每作一次交换, 元素的行指标与列指标所成排列同时作一次对换,
- 也就是 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 同时改变奇偶性,
- 因而它们的和 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性不变.
- 即对 (1) 作一次元素的交换不改变 (2) 的值,
- 因而一系列交换后, 有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} = (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')},$$

即 (2) 与 (4) 一致. ∎

从而可得 n 阶行列式定义的第二种记法:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

即列标按自然排列, 行标排列的奇偶性决定每一项的符号.

从而在行列式中, 行指标与列指标的地位是对称的.

性质 1

行、列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

右端称为原行列式的转置. 亦即行列式的转置等于其自身.

§4 n 阶行列式的性质

性质 2

若行列式中某一行的各元素有公因子 k, 则 k 可以提到行列式符号外边来:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\color{red}k}a_{i1} & {\color{red}k}a_{i2} & \cdots & {\color{red}k}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论

若行列式中有一行 (列) 为 0, 则行列式等于 0.

性质 3

分行 (列) 相加性:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 若行列式中某一行是两组数的和, 那么此行列式就等于两个行列式的和, 其中这两个行列式除这一行外全与原行列式的对应的行一样.

推论

若一个行列式中某行 (列) 是 m 组数的和, 则此行列式可写成 m 个行列式的和.

性质 4

如果行列式中有两行 (列) 相同, 那么行列式的值等于 0. 所谓两行 (列) 相同, 就是说两行 (列) 的对应元素都相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 5

如果行列式中两行 (列) 成比例, 那么行列式为 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5

如果行列式中两行 (列) 成比例, 那么行列式为 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{ka_{i1}} & \color{red}{ka_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{ka_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 6

把一行 (列) 的倍数加到另一行 (列) 上, 行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6

把一行 (列) 的倍数加到另一行 (列) 上, 行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 7

对换行列式中两行 (列) 的位置, 行列式反号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{k1}} & \color{blue}{a_{k2}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{k1}} & \color{blue}{a_{k2}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

例 1 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解 将各列加入第一列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

一个 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 若 $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$, 则它称为一个 对称行列式;
- 若 $a_{ij} = -a_{ji}$, 则它称为一个反对称行列式.

例 2 证明奇数阶的反对称行列式等于 0.

证明 因为 $a_{ii}=-a_{ii}$, 所以 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$. 故

$$d=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n d$$

当 n 为奇数时, $d=-d$, 从而 $d=0$.

例 3 证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

例 3 证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & -b_1 \\ c_2 & -a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{右边}$$

例 4 计算 n 级行列式

$$d=\begin{vmatrix} x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a \end{vmatrix}.$$

例 4 计算 n 级行列式

$$d=\begin{vmatrix} x_1+a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a \end{vmatrix}.$$

解 $$d=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+a\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2+a & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & x_3+a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+a \end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i+a\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_1+a\right)a^{n-1}.$$

§5 行列式的计算

从上节可以看出, 仅仅根据行列式的定义来计算行列式, 一般是比较麻烦的.

例如, 要计算一个五阶行列式, 就要计算 $5! = 120$ 项.

若阶数 n 再大些, 计算量更是惊人.

从而利用行列式定义来计算一般行列式几乎是不可能的, 但有些特殊的行列式是比较容易计算的.

计算行列式的一般方法是利用行列式的这些基本性质，将行列式化为上三角形或者下三角形行列式.

性质

任意一个 n 阶行列式都可以利用行列式的性质化为上三角形行列式 (或者下三角形行列式).

先考察第一列上的元素，若都为零，则行列式的值为零;

若第一列上有非零元素，则利用性质 7 可以使得第一个元素非零，故不妨设 $a_{11} \neq 0$.

将第一行的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 行上,$i = 2, 3, \cdots, n$，可使得第一列上除了第一个元素外其余都为零，即行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

再考察第二列，若 $a'_{22}, \cdots, a'_{n2}$ 中有非零元素，则利用性质 7，不妨设 $a'_{22} \neq 0$，将第二行的 $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$ 倍加到第 i 行上,$i = 3, \cdots, n$，可使得第二列上主对角线以下元素全为零.

续行此法，有限步之后总可以将行列式化为上三角形行列式.

计算方法：利用行列变换，将行列式变为三角形，再将对角元连乘.

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

计算方法：利用行列变换，将行列式变为三角形，再将对角元连乘.

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{vmatrix} = \frac{33}{2}.$$

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1.$$

§6 行列式按一行 (列) 展开

- 在 n 阶行列式的定义中，虽然每一项是 n 个元素的乘积，但是，由于这 n 个元素是取自不同的行、不同的列，所以对于某一确定行中的 n 个元素 (如 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$) 来说，每一项都含有其中的一个且只含有其中的一个元素. 因此，n 阶行列式的 $n!$ 项可以分成 n 组，第一组的项都含有 a_{i1}，第二组的项都含有 a_{i2}，等等，再分别把第 i 行的元素提出来，就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{1}$$

其中 A_{ij} 代表那些含有 a_{ij} 的项在提出公因子 a_{ij} 之后的代数和，$i, j = 1, 2, \cdots, n$.

- A_{ij} 中不再含有第 i 行的元素，即 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 全与行列式第 i 行的元素无关. 那么这些 A_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 究竟是什么?

在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置，构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，而 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

接下来我们证明

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

为了证明

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

先证 $i = j = n$ 的情况.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & {\color{red}1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

其次，在 (1) 式中令 $a_{i1}=\cdots=a_{i(j-1)}=a_{i(j+1)}=\cdots=a_{in}=0, a_{ij}=1$，即得

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ \color{red}{0} & \cdots & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \cdots & \color{red}{0} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 行依次与第 $i+1,\cdots,n$ 行交换，

$$A_{ij} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

第 j 列依次与第 $j+1, \cdots, n$ 列交换,

$$A_{ij} = (-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} & a_{(i-1)j} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} & a_{(i+1)j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2n-i-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

定理 3

设

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列等式成立：

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} d, k = i, \\ 0, k \neq i, \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj} = a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} d, l = j, \\ 0, l \neq j. \end{cases}$$

此称为行列式**依行（列）展开定理**.

计算方法：将某一行（列）尽可能多的元素变成零，再按该行（列）展开.

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -3 \\ -4 & 7 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & -8 & -10 & -5 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal{\text{列变换}} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 & -3 \\ 4 & -5 & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 4 & -5 & -18 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 0 & 39 & 6 \\ 0 & -26 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 6 \\ -26 & -8 \end{vmatrix} = -156.$

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解

$$D = 3 \cdot (-1)^{4+5} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\,3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 72$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 和 $A_{14} + 3A_{24} + 2A_{34} + 4A_{44}$.

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 和 $A_{14}+3A_{24}+2A_{34}+4A_{44}$.

解

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad A_{14}+3A_{24}+2A_{34}+4A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

例 证明范德蒙德行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

例 证明范德蒙德行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j).$$

证 对 n 做归纳. 当 $n=2$ 时, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$, 结论成立.

假定结论对 $n-1$ 成立, 下面证明结论对 n 也成立. 方法是:

- 第 n 行减去第 $n-1$ 行的 a_1 倍,
- 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 a_1 倍, $\cdots$,
- 第 2 行减去第 1 行的 a_1 倍:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由归纳假设可知，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2\leq j<i\leq n}(a_i - a_j),$$

于是

$$\begin{aligned} V_n &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\prod_{2\leq j<i\leq n}(a_i - a_j) \\ &= \prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i - a_j). \end{aligned}$$

例 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

例 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

注意到该行列式是一个第二行为 $1\ 2\ 3\ 4$ 的四阶范德蒙行列式，于是有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=(2-1)(3-2)(3-1)(4-3)(4-2)(4-1)=12$$

计算方法：加边法.

例 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$.

计算方法：加边法.

例 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$.

解 若 $n=1$，则 $D_1 = x_1 - m$. 当 $n \geq 2$ 时，若 $m=0$，则 $D_n = 0$.

以下只需考虑 $m \neq 0$ 的情况 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

因此，当 $m \neq 0$ 时，

$$D_n = (-m)^n \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{m} \right).$$

例 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解 先把行列式增加一行一列，变成一个与原行列式等值的 $n+1$ 阶的行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

计算方法：递推关系

例 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

解 易知 $D_1 = 7, D_2 = 39$. 因为

$$D_n = 7D_{n-1} - 2 \times 5D_{n-2} = 7D_{n-1} - 10D_{n-2},$$

所以

$$D_n - 2D_{n-1} = 5(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = 5^2(D_{n-2} - 2D_{n-3})$$

$$= \cdots = 5^{n-2}(D_2 - 2D_1) = 5^{n-2}(39 - 14) = 5^n.$$

又因为

$$D_n - 5D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 5D_{n-2}) = 2^2(D_{n-2} - 5D_{n-3})$$

$$= \cdots = 2^{n-2}(D_2 - 5D_1) = 2^{n-2}(39 - 5 \times 7) = 2^n,$$

所以 $5D_n - 2D_n = 5^{n+1} - 2^{n+1}$, 即

$$D_n = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}.$$

例 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$

解　当 $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$;

当 $n=2$ 时, $D_2=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$.

解　当 $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$;

当 $n=2$ 时, $D_2=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$.

猜想: $D_n=\cos n\alpha$.

解　当 $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$;

当 $n=2$ 时, $D_2=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$.

对 n 用数学归纳法证明: $n=1,2$ 时, 成立.

假设对于阶数小于 n 的上述类型的行列式结论成立, 将 D_n 依第 n 行展开得

$$\begin{aligned}D_n &= 2\cos\alpha\, D_{n-1}-D_{n-2}\\ &= 2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha\\ &= (\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha)-\cos(n-2)\alpha\\ &= \cos n\alpha.\end{aligned}$$

由数学归纳法, 知 $D_n=\cos n\alpha$.

例 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解 $$D_n = \begin{vmatrix} a+(x-a) & a+0 & a+0 & \cdots & a+0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix} + (x-a)D_{n-1} = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1}.$$

即有

$$D_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1}. \qquad (1)$$

又因为

$$D_n = \begin{vmatrix} -a+(x+a) & a & a & \cdots & a \\ -a+0 & x & a & \cdots & a \\ -a+0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a+0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & -2a & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -2a & -2a & \cdots & x-a \end{vmatrix} + (x+a)D_{n-1}$$

$= -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}$. 即有

$$D_n = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}. \tag{2}$$

(1) 式两端同乘 $x+a$, (2) 式两端同乘 $x-a$ 分别得

$$\begin{cases} (x+a)D_n &= \quad a(x+a)^n + (x^2-a^2)D_{n-1}, \\ (x-a)D_n &= -a(x-a)^n + (x^2-a^2)D_{n-1}, \end{cases}$$

两式相减, 得 $2aD_n = a\left((x+a)^n + (x-a)^n\right)$.

当 $a \neq 0$ 时, $D_n = \frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

当 $a = 0$ 时, $D_n = x^n = \frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

利用行列式依行（列）展开定理还可以给出行列式计算的一些重要的方法，如

- 递推法
- 拆项法
- 数学归纳法
- 加边法

引例

求解线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1, \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 4, \\
x_1 & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 3, \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3.
\end{array}\right.$$

设线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{cases}
\tag{1}
$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

其系数行列式为

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{vmatrix} \tag{2}$$

构造 d_j

将 d 的第 j 列换为常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$，得

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

将 d_j 按第 j 列展开，因其余列与 d 相同，有

$$d_j =$$

构造 d_j

将 d 的第 j 列换为常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，得

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

将 d_j 按第 j 列展开，因其余列与 d 相同，有

$$d_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

定理 4

若系数行列式 $d \neq 0$，则方程组 (1) 有唯一解：

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{d_n}{d}. \tag{5}$$

证明　首先，证明 (5) 式确为 (1) 的解.

要证 $x_1 = \frac{d_1}{d}$, $x_2 = \frac{d_2}{d}$, $\cdots$, $x_n = \frac{d_n}{d}$ 是方程组 (1) 的解. 即证

$$a_{i1}\frac{d_1}{d} + a_{i2}\frac{d_2}{d} + \cdots + a_{in}\frac{d_n}{d} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

因为 $d_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$, 代入上式得

$$\begin{aligned}
a_{i1}\frac{d_1}{d} + a_{i2}\frac{d_2}{d} + \cdots + a_{in}\frac{d_n}{d} &= \frac{1}{d}\big(a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{in}d_n\big) \\
&= \frac{1}{d}\big[a_{i1}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) \\
&\qquad + a_{i2}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}) + \cdots \\
&\qquad + a_{in}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn})\big] \\
&= \frac{1}{d}\big[(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})b_i\big] = b_i.
\end{aligned}$$

因此，$x_j = \dfrac{d_j}{d}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 为方程组 (1) 的解.

证明　首先，证明 (5) 式确为 (1) 的解.

要证 $x_1 = \frac{d_1}{d}$, $x_2 = \frac{d_2}{d}$, $\cdots$, $x_n = \frac{d_n}{d}$ 是方程组 (1) 的解. 即证

$$a_{i1}\frac{d_1}{d} + a_{i2}\frac{d_2}{d} + \cdots + a_{in}\frac{d_n}{d} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

因为 $d_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$, 代入上式得

$$\begin{aligned}
a_{i1}\frac{d_1}{d} + a_{i2}\frac{d_2}{d} + \cdots + a_{in}\frac{d_n}{d} &= \frac{1}{d}\big(a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{in}d_n\big) \\
&= \frac{1}{d}\big[a_{i1}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) \\
&\qquad + a_{i2}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2}) + \cdots \\
&\qquad + a_{in}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn})\big] \\
&= \frac{1}{d}\big[(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})b_i\big] = b_i.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{思考：如何把证明写得更简洁？}}$

因此，$x_j = \dfrac{d_j}{d}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 为方程组 (1) 的解.

证明　（使用求和号形式）首先，证明解的 存在性，即证明 (5) 式确为 (1) 的解.

要证 $x_1 = \frac{d_1}{d}$, $x_2 = \frac{d_2}{d}$, $\cdots$, $x_n = \frac{d_n}{d}$ 是方程组 (1) 的解，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

由 (4) 式可知

$$d_j = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj},$$

证明（使用求和号形式）首先，证明解的 存在性，即证明 (5) 式确为 (1) 的解.

要证 $x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d}$ 是方程组 (1) 的解，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

由 (4) 式可知
$$d_j = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj},$$

于是
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj}\Big) = \frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n} b_s\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}\Big)$$
$$= \frac{1}{d}(b_1 \cdot 0 + \cdots + b_i \cdot d + \cdots + b_n \cdot 0) = b_i.$$

因此，$x_j = \frac{d_j}{d}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 确为方程组 (1) 的解.

接下来证明解的 唯一性. 设 $(c_1, \dots, c_n)$ 是一个解, 则对每个 $i = 1, \dots, n$, 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i. \tag{7}$$

接下来证明解的 唯一性. 设 $(c_1, \dots, c_n)$ 是一个解, 则对每个 $i = 1, \dots, n$, 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i. \tag{7}$$

取系数矩阵第 k 列的代数余子式 $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$, 用它们分别乘 (7) 中的 n 个等式

$$A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i A_{ik}, \quad i = 1, \dots, n.$$

将这 n 个等式相加, 得

接下来证明解的唯一性. 设 $(c_1, \dots, c_n)$ 是一个解, 则对每个 $i = 1, \dots, n$，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i. \tag{7}$$

取系数矩阵第 k 列的代数余子式 $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$，用它们分别乘 (7) 中的 n 个等式

$$A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i A_{ik}, \quad i = 1, \dots, n.$$

将这 n 个等式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}. \tag{8}$$

利用恒等式
$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} \tag{8}$$

$$\text{左边} = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} \right)$$

利用代数余子式的正交性

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} d & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

整个和式简化为 $d \cdot c_k$.

$$\text{右边} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$$

这正是将原行列式 $d = \det(a_{ij})$ 的第 k 列替换为 $(b_1, \ldots, b_n)$ 后按第 k 列展开的结果.

因此,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = d_k.$$

从而由 (8) 得 $d\,c_k = d_k$ 即 $c_k = \dfrac{d_k}{d}$ $(d \neq 0)$.

因此，若解存在，则必为 $\left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \ldots, \frac{d_n}{d}\right)$. 即方程组 **至多有一个解**. ∎

例 1

求解线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1, \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 4, \\
x_1 & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 3, \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3.
\end{cases}
$$

例 1

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 \quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

解 线性方程组的系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故可以应用 Cramer 法则.

由于

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -56, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16, \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13,$$

所以，线性方程组的唯一解为

$$x_1 = 56, x_2 = 8, x_3 = -16, x_4 = -13.$$

注

(1) *Cramer* 法则只适用于方程个数与未知量个数相等且系数行列式非零的线性方程组, 至于一般的线性方程组的求解问题是后面一章的内容.

(2) 用此法计算量太大, 但在理论上非常重要.

齐次线性方程组

定理 5

- 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

  的系数行列式 $d \neq 0$, 那么它只有零解.

- 换句话说, 如果线性方程组 (10) 有非零解, 那么必有 $d = 0$.

例 2

若齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda\, x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda\, x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda\, x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解，则 $\lambda = ?$

解 由定理 6, 如果线性方程组有非零解, 那么系数行列式

$$|A| = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0,$$

那么 $\lambda = -2$ 或 1.

易证 $\lambda = -2$ 或者 1 时, 线性方程组确实有非零解.

定义

在一个 n 阶行列式 d 中, 对于 $1 \le k \le n$,

- 任意选定 k 行（设行指标分别为 $i_1, i_2, \ldots, i_k$）及 k 列（设行指标分别为 $j_1, j_2, \ldots, j_k$）位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按照原来的相对位置组成一个 k 阶行列式 M, 称为行列式 d 的一个k 级子式.
- 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的相对位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为余子式, 而 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} M'$ 称为 M 的代数余子式.

例 1

在行列式

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第一、二行，第二、四列，得到一个二级子式

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

其余子式为

$$M_1' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

代数余子式为 $(-1)^{1+2+2+4}M_1' = -M_1' = 0.$

选定第一、二行, 三、四列, 得到一个二级子式

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

其余子式为

$$M_2' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

代数余子式为 $(-1)^{1+2+3+4}M_2' = M_2' = 0.$

Laplace 展开定理

定理 6

设在行列式 d 中任意取定了 k $(1 \le k \le n-1)$ 个行（列），由这 k 行（列）元素所组成的一切 k 级子式与它们对应的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

注

- n 阶行列式中位于 k 行（列）上的一切 k 级子式的个数为

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

- $k=1$ 时, *Laplace* 展开定理就是行列式的依行 *(列)* 展开定理.

例 2

计算

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 取定第 1、2 两行，在这两行上共有 $C_4^2 = 6$ 个子式：

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$
$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad M_6 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

它们对应的代数余子式为

$$A_1 = (-1)^{1+2+1+2} M_1' = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_2 = (-1)^{1+2+1+3} M_2' = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_3 = (-1)^{1+2+1+4} M_3' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_4 = (-1)^{1+2+2+3} M_4' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_5 = (-1)^{1+2+2+4} M_5' = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_6 = (-1)^{1+2+3+4} M_6' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

由 Laplace 展开定理, 得

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 + M_4 A_4 + M_5 A_5 + M_6 A_6 = -10.$$

例 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b_{11} & x_1 & b_{12} & x_2 & b_{13} & x_3 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_{21} & x_1^2 & b_{22} & x_2^2 & b_{23} & x_3^2 \\ a_1^2 & 0 & a_2^2 & 0 & a_3^2 & 0 \\ b_{31} & x_1^3 & b_{32} & x_2^3 & b_{33} & x_3^3 \end{vmatrix}.$$

2. 计算行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$