第一章　多项式

张彪

天津师范大学

数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

目录

1. 数域
2. 一元多项式
3. 整除的概念
4. 最大公因式
5. 因式分解定理
6. 重因式
7. 多项式函数
8. 复系数多项式与实系数多项式的因式分解
9. 有理系数多项式

§1 数域

- 对所要讨论的问题，通常要明确所考虑的数的范围，不同范围内同一问题的回答可能是不同的. 例如，$x^2+1=0$ 在实数范围与复数范围内解的情形不同.
- 常遇到的数的范围： 有理数集、实数集、复数集
- 共性 (代数性质)： 加、减、乘、除运算性质
- 有些数集也有与有理数集、实数集、复数集相同的代数性质.
- 为在讨论中将其统一起来，引入一个一般的概念——数域.

§1 数域

- 对所要讨论的问题，通常要明确所考虑的数的范围，不同范围内同一问题的回答可能是不同的. 例如，$x^2+1=0$ 在实数范围与复数范围内解的情形不同.
- 常遇到的数的范围：有理数集、实数集、复数集
- 共性 (代数性质)：加、减、乘、除运算性质
- 有些数集也有与有理数集、实数集、复数集相同的代数性质.
- 为在讨论中将其统一起来，引入一个一般的概念——数域.

定义 (数域)

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 *0* 与 *1*.
如果 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在 P 中，则称 P 为一个数域.

注

(1) 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 都封闭的、包含非零元素的数集称为一个数域.

(2) 任何数域均包含 $0, 1$ 这两个数.

例 1

有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 均构成数域，而整数集 $\mathbf{Z}$、自然数集 $\mathbf{N}$ 都不是数域.

例 2

所有形如 $a+b\sqrt{2}\,(a,b$ 是有理数$)$ 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

例 2

所有形如 $a+b\sqrt{2}\,(a,b$ 是有理数$)$ 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证明 (i) $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(ii) 对四则运算封闭. 事实上对于 $a,\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 设 $\alpha=a+b\sqrt{2},\beta=c+d\sqrt{2}$, 有

$$a\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$
$$a\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

设 $a=a+b\sqrt{2}\neq 0$, 则 $a-b\sqrt{2}\neq 0$ 且

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}&=\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

∎

思考:

- $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{C}\}$ 是否是一个数域?
- $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是否是一个数域?

例 2

所有形如 $a+b\sqrt{2}\,(a,b$ 是有理数$)$ 的数构成一个数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证明　(i) $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(ii) 对四则运算封闭. 事实上对于 $a,\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 设 $\alpha=a+b\sqrt{2},\beta=c+d\sqrt{2}$, 有

$$a\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$a\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

设 $a=a+b\sqrt{2}\neq 0$, 则 $a-b\sqrt{2}\neq 0$ 且

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}&=\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

∎

思考:

- $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{C}\}$ 是否是一个数域？
- $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是否是一个数域？

构成数域; 不构成数域

注

任何数域包含有理数域作为它的一部分.

注

任何数域包含有理数域作为它的一部分.

证明　设 P 为一个数域.

- 由定义知 $1 \in P$,
- 又 P 对加法封闭知: $1+1=2,\ 1+2=3,\ \cdots,\ P$ 包含所有自然数;
- 由 $0 \in P$ 及 P 对减法的封闭性知: P 包含所有负整数, 因而 P 包含所有整数;
- 任何一个有理数都可以表为两个整数的商, 由 P 对除法的封闭性知: P 包含所有有理数.

即任何数域都包含有理数域作为它的一部分.

§2 一元多项式

多项式理论是高等代数的重要内容之一. 它不仅是初等代数的重要内容之一, 一次多项式 $ax+b$, 二次多项式 x^2+ax+b 等, 而且它为高等代数所讲授的基本内容提供了理论依据, 其中的一些重要定理和方法在进一步学习数学理论和解决实际问题时常常用到.

- 在数学分析中有著名的魏尔斯特拉斯定理, 任一连续函数都可用多项式作为其逼近函数.
- 它在微分方程中占有重要地位, 一个微分方程的特征方程就是一个多项式.
- 在代数几何中多项式方程组的解集是基本研究对象.
- 在理论计算机科学中有多项式时间算法.

本章介绍一元多项式的基本理论.

一、一元多项式的有关概念

设 P 是一个数域, x 是未定元, n 为非负整数. 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in P$, 称为系数在数域 P 中的一元多项式, 简称为数域 P 上的一元多项式.

- 符号 x 可以是为未知数, 也可以是其它待定事物.
- 习惯上记为 $f(x), g(x), \ldots$ 或 $f, g, \ldots$
- 上述形式表达式可写为 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
- 这里 $a_i x^i$ 称为 i 次项, a_i 称为 i 次项系数.

多项式相等——$f(x) = g(x)$ 当且仅当同次项的系数全相等（系数为零的项除外）

零多项式——系数全为 0 的多项式

- 若 $a_n \neq 0$, 则称 $a_n x^n$ 为首项或最高次项. 若 $a_n = 1$, 则成 $f(x)$ 是首一多项式.
- 多项式 $f(x)$ 的次数 ——$f(x)$ 的最高次项对应的幂次, 记作 $\deg(f(x))$.
- 零多项式不定义次数
- $\frac{1}{x}$ 是多项式么?

设 $f(x), g(x)$ 为数域 P 上的一元多项式，不妨令

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

- 加法：$f(x) \pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i \pm b_i\right) x^i$，若 $n \geq m$
- 乘法：
$$\begin{aligned} f(x) g(x) & =a_n b_m x^{n+m}+\left(a_n b_{m-1}+a_{n-1} b_m\right) x^{n+m-1}+\cdots+a_0 b_0 \\ & =\sum_{k=0}^{n+m}\left(a_0 b_k+a_1 b_{k-1}+\cdots+a_k b_0\right) x^k=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k \end{aligned}$$

由此可得：数域 P 上的多项式经过加、减、乘运算后，所得结果仍然是数域 P 上的多项式.

例 $f(x)=2x^2+3x-1, g(x)=x^3+2x^2-3x+2$，则

设 $f(x), g(x)$ 为数域 P 上的一元多项式, 不妨令

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

- 加法: $f(x) \pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i \pm b_i\right) x^i$, 若 $n \geq m$
- 乘法: $$\begin{aligned} f(x) g(x) &= a_n b_m x^{n+m}+\left(a_n b_{m-1}+a_{n-1} b_m\right) x^{n+m-1}+\cdots+a_0 b_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+m}\left(a_0 b_k+a_1 b_{k-1}+\cdots+a_k b_0\right) x^k=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k \end{aligned}$$

由此可得: 数域 P 上的多项式经过加、减、乘运算后, 所得结果仍然是数域 P 上的多项式.

例 $f(x)=2 x^2+3 x-1, g(x)=x^3+2 x^2-3 x+2$, 则

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \left(2 x^2+3 x-1\right)+\left(x^3+2 x^2-3 x+2\right)=x^3+4 x^2+1 \\ f(x)-g(x) &= \left(2 x^2+3 x-1\right)-\left(x^3+2 x^2-3 x+2\right)=-x^3+6 x-3 \\ f(x) g(x) &= \left(2 x^2+3 x-1\right)\left(x^3+2 x^2-3 x+2\right) \\ &= 2 x^5+7 x^4-x^3-7 x^2+9 x-2 \end{aligned}$$

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

且 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.

1. 对于多项式的和与差，当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时，运算后的次数关系为

$$\deg[f(x) \pm g(x)] \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}.$$

2. 对于多项式的乘法，若 $f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$，则 $f(x)g(x) \neq 0$，并且

$$\deg[f(x)g(x)] = \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

此外，乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积.

四、多项式的运算规律

设 $f(x), g(x), h(x)$ 为数域 P 上的一元多项式，则

(1) 加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

(2) 加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

(3) 乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x)$$

(4) 乘法结合律：

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

(5) 乘法对加法的分配律：

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

(6) 乘法消去律：若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 且 $f(x)\neq 0$，则

$$g(x)=h(x)$$

(6) **乘法消去律**：若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 且 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$.

证明 因为 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，故由分配律可得 $f(x)[g(x)-h(x)]=0$.

由于 $f(x)\neq 0$，那么 $g(x)-h(x)=0$，即 $g(x)=h(x)$.

定义

数域 P 上的一元多项式的全体，称为**数域 P 上的一元多项式环**，记作 $P[x]$，P 称为 $P[x]$ 的**系数域**.

自本节开始, 我们总是在某一固定数域 P 上讨论多项式.

- 在一元多项式环 $P[x]$ 中, 有 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$. 是否有除法?
- 应该如何描述 $P[x]$ 中两个多项式相除的关系?
- 两个多项式除法的一般结果是什么?

§3 整除的概念

自本节开始，我们总是在某一固定数域 P 上讨论多项式.

- 在一元多项式环 $P[x]$ 中，有 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$. 是否有除法?
- 应该如何描述 $P[x]$ 中两个多项式相除的关系?
- 两个多项式除法的一般结果是什么?

在一元多项式环 $P[x]$ 中可以作加、减、乘等运算，乘法的逆——除法运算并不是普遍可以作的，如 $\frac{x+1}{x}$ 不是多项式，即 $\frac{x+1}{x} \notin P[x]$.

因此讨论两个多项式能整除的条件就成为一个重要课题.

虽然除法并非处处可行，就像任意两个整数 a, b 不一定有 b 整除 a 一样，但在整数中当 $b \neq 0$ 时，存在唯一的一对整数 q, r，使得

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

在多项式中也有类似的结论.

一、带余除法

带余除法

对于数域 P 上的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，只要 $g(x) \neq 0$，一定有 $F[x]$ 中的多项式 $q(x)$，$r(x)$ 存在，使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \qquad (1)$$

成立，其中 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 或者 $r(x) = 0$，并且这样的 $q(x)$，$r(x)$ 是唯一的.

注

(1) 带余除法定理中的 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式，
而 $r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式.

(2) 此法实际上是“首项除首项”的方法.

证明　(存在性) 若 $f(x)=0$, 取 $q(x)=r(x)=0$ 即可.

以下设 $f(x)\neq 0$. $\deg(f(x))=n, \deg(g(x))=m$.

对 $f(x)$ 的次数 n 作数学归纳法.

当 $n<m$ 时, 取 $q(x)=0, r(x)=f(x)$, 有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, 结论成立.

当 $n\geq m$ 时, 假设次数小于 n 时结论成立.

以下证明次数为 n 时结论也成立.

设 $f(x), g(x)$ 的首项分别为 ax^n 及 bx^m. 令

$$f_1(x)=f(x)-b^{-1}ax^{n-m}g(x)$$

注意到 $b^{-1}ax^{n-m}g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的首项, 可知 $\deg\left(f_1(x)\right)<n$ 或 $f_1(x)=0$.

对于后者, 取 $q(x)=b^{-1}ax^{n-m}$, $r(x)=0$.

对于前者, 由归纳假设及 (1), 对于 $f_1(x), g(x)$, 必有 $q_1(x), r_1(x)$ 存在, 使得

$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

其中 $\deg(r_1(x)) < \deg(g(x))$ 或者 $r_1(x) = 0$.

于是

$$f(x) = f_1(x) + b_m^{-1}a_n x^{n-m}g(x) = [q_1(x) + b_m^{-1}a_n x^{n-m}]g(x) + r_1(x),$$

故可取 $q(x) = q_1(x) + b_m^{-1}a_n x^{n-m}$, $r(x) = r_1(x)$, 就能使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

其中 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 或 $r(x) = 0$.

由第二数学归纳法原理，存在性得证.

(唯一性) 若还有 $q'(x), r'(x) \in P[x]$, 使

$$f(x) = q'(x)g(x) + r'(x)$$

其中 $\deg(r'(x)) < \deg(g(x))$ 或 $r'(x) = 0$. 则

$$q(x)g(x) + r(x) = q'(x)g(x) + r'(x)$$

即

$$(q(x) - q'(x))\, g(x) = r'(x) - r(x)$$

（反证）假设 $q(x) \neq q'(x)$. 由假设 $g(x) \neq 0$ 可知 $r'(x) - r(x) \neq 0$ 且

$$\deg(q(x) - q'(x)) + \deg(g(x)) = \deg(r'(x) - r(x))$$

但 $\quad \deg(g(x)) > \deg(r'(x) - r(x))$, 矛盾.

因此 $q(x) = q'(x), r'(x) = r(x)$.

∎

例 1

设 $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$, 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式和余式.

例 1

设 $f(x)=3x^3+4x^2-5x$, $g(x)=x^2-3x+1$, 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式和余式.

解

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
x^2-3x+1 & 3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 & 3x+13 \\
 & 3x^3 & -9x^2 & +3x & & \\
\cline{2-5}
 & & 13x^2 & -8x & +6 & \\
 & & 13x^2 & -39x & +13 & \\
\cline{2-5}
 & & & 31x & -7 &
\end{array}
$$

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

定义 (整除)

- 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 如果存在多项式 $h(x) \in P[x]$, 使
$$f(x) = h(x)g(x)$$
$g(x)$ 整除 $f(x)$ (或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除), 记为 $g(x) \mid f(x)$.
- 当 $g(x) \nmid f(x)$ 时, 称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式, $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式.
- 当 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$ 时, 记为 $g(x) \nmid f(x)$.

注

(1) 任意多项式 $f(x)$ 能整除其自身及零多项式.

(2) 若 $0 \mid f(x)$, 则必有 $f(x) = 0$.

(3) 零次多项式 a $(\neq 0)$ 能整除任意多项式 $f(x)$: $f(x) = a(a^{-1}f(x))$.

(4) 当 $g(x) \neq 0$ 且 $g(x) \mid f(x)$ 时, $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得商有时可记为
$$\frac{f(x)}{g(x)}.$$

定理 1

整除的判别: 设 $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, 则 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

定理 1

整除的判别：设 $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, 则 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

证明

$\Leftarrow$ 若余式 $r(x) = 0$, 则

$$f(x) = q(x)g(x),$$

即 $g(x) \mid f(x)$.

$\Rightarrow$ 若 $g(x) \mid f(x)$, 则

$$f(x) = q(x)g(x) = q(x)g(x) + 0$$

即 $r(x) = 0$.

三、整除的性质

性质 1

$f(x) \mid g(x)$ 且 $g(x) \mid f(x)$ 当且仅当 $f(x) = cg(x)$, 其中 c 为数域 P 中的一个非零常数.

性质 2

若 $f(x) \mid g(x), g(x) \mid h(x)$, 则 $f(x) \mid h(x)$. (传递性)

性质 3

若 $h(x) \mid f_i(x), i = 1, 2, \cdots, t$, 则 $h(x) \mid [f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_t(x)g_t(x)]$, 其中 $g_i(x)(i = 1, 2, \cdots, t)$ 为 $F[x]$ 中任意多项式.

由此可得: $f(x)$ 与其任一非零常数倍 $cf(x)$ 有完全相同的因式及倍式, 故在讨论中必要时可互相替代.

性质 4

两个多项式的整除关系不因数域的扩大而改变.

性质 4

两个多项式的整除关系不因数域的扩大而改变.

证明 设 $\overline{F}$ 与 P 都是数域, 且 $F \subseteq \overline{F}$, 而 $f(x), g(x) \in P[x]$, 显然 $f(x), g(x) \in \overline{F}[x]$. 若在 P 中有带余除法式子

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$,
则此式在 $\overline{F}$ 中仍成立, 即用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得带余除法式子不因数域的扩大而改变, 从而两个多项式的整除关系也不因数域的扩大而改变.

定义 (公因式)

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若有 $d(x) \in P[x]$, 使

$$d(x)|f(x), d(x)|g(x),$$

称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

由于任意两个多项式总有公因式 (非 0 常数), 因此公因式中占有重要地位的—最大公因式.

定义 (最大公因式)

设 $f(x), g(x) \in P[x]$. 若有 $d(x) \in P[x]$ 满足:
(i) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式;
(ii) $f(x), g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.
则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

- 欲证 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 需证明以下两点:
  (1) $d(x) \mid f(x)$ 且 $d(x) \mid g(x)$;
  (2) 对任意的 $h(x)$, 只要 $h(x) \mid f(x)$,$h(x) \mid g(x)$, 就能得出 $h(x) \mid d(x)$.

注

- 任意多项式 $f(x)$ 是 $f(x)$ 与 *0* 的一个最大公因式.
- 两个 *0* 多项式的最大公因式是 *0*.
- 任意多项式 $f(x)$ 与 *1* 的最大公因式为零次多项式.
- 若 $g(x) \mid f(x)$, 则 $g(x)$ 即为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

引理 1

设 $f(x), g(x) \in P[x]$. 如果等式

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立, 则 $f(x), g(x)$ 和 $g(x), r(x)$ 有相同的公因式.

证明 由 (*) 知, $f(x)$ 是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个组合, 故若 $\varphi(x)|g(x), \varphi(x)|r(x)$, 必有 $\varphi(x) \mid f(x)$, 此即 $g(x), r(x)$ 的公因式都是 $f(x), g(x)$ 的公因式; 又由 (*), 有 $r(x) = f(x) - q(x)g(x)$

故若 $\varphi(x)|f(x), \varphi(x)|g(x)$, 必有 $\varphi(x)$ 整除 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合 $r(x)$,

此即 $f(x), g(x)$ 的公因式都是 $g(x), r(x)$ 的公因式.

综上所述, $f(x), g(x)$ 和 $g(x), r(x)$ 有相同的公因式.

定理 2 (最大公因式存在性定理)

对于 $P[x]$ 中的两个多项式 $f(x), g(x)$，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$ 且存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) \text{ (贝祖等式)}$$

注意：等式 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 成立，$d(x)$ 未必就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

例如 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x, u(x) = x, v(x) = x + 1$，$d(x) = 2x\left(x^2 + 1\right)$. 有

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无公因式，故 $d(x)$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

证明　存在性:

(i) 如果 $f(x), g(x)$ 有一个为零多项式, 比如 $g(x)=0$, 则 $f(x)$ 就是 $f(x), g(x)$ 一个最大公因式, 即 $d(x)=f(x)$, 且

$$f(x)=1\cdot f(x)+1\cdot 0=1\cdot f(x)+1\cdot g(x)$$

(ii) 一般情形: 不妨设 $g(x)\neq 0$. 由带余除法, 用 $g(x)$ 除 $f(x)$, 得到商 $q_1(x)$, 余式 $r_1(x)$; 即

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

若 $r_1(x)=0$, 则 $r_1(x), g(x)$ 的最大公因式为 $g(x)$, 从而 $f(x), g(x)$ 最大公因式 $d(x)$ 仅与 $g(x)$ 相差一个非 0 常数因子, 此时

$$d(x)=\mathrm{cg}(x)=0\cdot f(x)+\mathrm{cg}(x)$$

若 $r_1(x)\neq 0$, 再用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$, 得到商 $q_2(x)$, 余式 $r_2(x)$;

又若 $r_2(x)\neq 0$, 就用 $r_2(x)$ 除 $r_1(x)$, 得出商 $q_3(x)$, 余式 $r_3(x)$;

如此辗转相除下去$\cdots$...,

所得余式的次数不断降低, 即

$$\deg(g(x)) > \deg\left(r_1(x)\right) > \deg\left(r_2(x)\right) \quad > \cdots ..$$

经有限次之后, 必有余式为零 (因次数有限). 即

$$\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\
g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\
&\cdots\cdots \\
r_{i-2}(x) &= q_i(x)r_{i-1}(x) + r_i(x) \\
&\cdots\cdots \\
r_{s-3}(x) &= q_{s-1}(x)r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x) \\
r_{s-2}(x) &= q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x) \\
r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x)r_s(x) + 0
\end{aligned}$$

$r_s(x)$ 与 0 的最大公因式是 $r_s(x)$,

由引理知, $r_s(x)$ 也是 $r_s(x)$ 与 $r_{s-1}(x)$ 的一个最大公因式;

也是 $r_{s-1}(x)$ 与 $r_{s-2}(x)$ 的一个最大公因式,

以此逐步上推 $\cdots\cdots$, $r_s(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

为得到定理结论中的等式, 由上面的倒数第二个等式, 我们有

$$r_s(x) = r_{s-2}(x) - q_s(x)r_{s-1}(x)$$

而由倒数第三式, 有

$$r_{s-1}(x) = r_{s-3}(x) - q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)$$

带入上式, 消去 $r_{s-1}(x)$, 得到

$$r_s(x) = (1 + q_s(x)q_{s-1}(x))\, r_{s-2}(x) - q_s(x)r_{s-3}(x)$$

以同样的方法逐个消去 $r_{s-2}(x), \cdots\cdots, r_1(x)$, 并项后, 得到

$$r_s(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

唯一性:

设 $d_1(x), d_2(x)$ 均为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 下证 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 之间只相差一个非零常因子.

因为 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 都是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 故有 $d_2(x) \mid d_1(x)$ 且 $d_1(x) \mid d_2(x)$

从而 $d_1(x) = cd_2(x)$,$c \neq 0$,

即两个多项式的最大公因式在不计入一个非零常因子的意义下是唯一的.

特别地, 首项系数为 1 的最大公因式是唯一的, 记为 $(f(x), g(x))$.

综上所述, 证毕.

注

- 定理中求最大公因式的方法称为辗转相除法或欧几里得算法.
- 最大公因式在相差一个非零常数的意义下是唯一确定的. 事实上, 若 $d_1(x)$ $d_2(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 由最大公因式定义, 知 $d_1(x)$ 为 $d_2(x)$ 的因式, $d_2(x)$ 也为 $d_1(x)$ 的因式, 即
$$d_1(x)\,|\,d_2(x),\ d_2(x)|\ d_1(x)$$
由整除的性质知:
$$d_1(x) = cd_2(x).$$
- $(f(x), g(x))$ 是指 $f(x)$ 与 $g(x)$ 首项系数为 1 的最大公因式.

例 1

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$$
$$g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

求 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

例 1

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$$
$$g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

求 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

辗转相除法可按下面的格式来作:

$$\begin{array}{r|r|l}
3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 & \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \\
 & x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x & = q_1(x) \\
\cline{2-2}
 & -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3 & \\
 & -\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} & \\
\cline{2-2}
 & r_1(x) = -\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} &
\end{array}$$

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

$-\frac{27}{5}x+9$	$3x^3+10x^2+2x-3$	$x^4+3x^3-x^2-4x-3$	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$
$=q_2(x)$	$3x^3+15x^2+18x$	$x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$	$=q_1(x)$
	$-5x^2-16x-3$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$	
	$-5x^2-25x-30$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	
	$r_2(x)=9x+27$	$r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$	

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$

$-\frac{27}{5}x+9$	$3x^3+10x^2+2x-3$	$x^4+3x^3-x^2-4x-3$	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$
$=q_2(x)$	$3x^3+15x^2+18x$	$x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$	$=q_1(x)$
	$-5x^2-16x-3$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$	
	$-5x^2-25x-30$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	
	$r_2(x)=9x+27$	$r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81}$
		$-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x$	$=q_3(x)$
		$-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$	
		$-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$	
		0	

$$
\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)g(x)+r_1(x)\\
g(x) &= q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\
r_1(x) &= q_3(x)r_2(x)
\end{aligned}
$$

因此

$$(f(x), g(x)) = \frac{1}{9} r_2(x) = x + 3$$

由

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) \\ &= g(x) - q_2(x)\left(f(x) - q_1(x)g(x)\right) \\ &= -q_2(x)f(x) + \left(1 + q_1(x)q_2(x)\right)g(x) \\ &= \left(\frac{27}{5}x - 9\right)f(x) + \left(-\frac{9}{5}x^2 + \frac{18}{5}x\right)g(x) \end{aligned}$$

于是，令

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{9} q_2(x) = \frac{3}{5}x - 1, \\ v(x) &= \frac{1}{9}\left(1 + q_1(x)q_2(x)\right) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x, \end{aligned}$$

就有

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

已知零次多项式是任意两个多项式的公因式.

现在讨论两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是零次多项式时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系.

定义

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是数域 P 上两个多项式.
如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

注

(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 则它们除零次多项式外无其他的公因式.
反之, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只有 0 次公因式, 则它们互素.
(2) 若 $f(x), g(x)$ 互素, 则它们不能同时为 0, 但可以有一个为 0, 如 $f(x) = 0, g(x) = 1$.

定理 3 (多项式互素的判定定理)

$F[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素当且仅当存在 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

证明 $\Rightarrow$ 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 即 $(f(x), g(x)) = 1$, 故由定理 3 得, 存在 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

$\Leftarrow$ 因为 1 是 $f(x), g(x)$ 的一个公因式, 且 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$,

故对于任意的 $h(x)$, 只要 $h(x) \mid f(x), h(x) \mid g(x)$, 就可得出 $h(x) \mid 1$,

即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式都是零次的, 那么 $(f(x), g(x)) = 1$, 亦即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素. ■

当 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ 时, 显然也有 $(u(x), v(x)) = 1$.

注

(1) **定理 3 的逆不真**: **即存在** $u(x), v(x)$, **使得** $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, **但** $d(x)$ **不是** $f(x), g(x)$ **的最大公因式**. **如**:$f(x) = x^2 - 1, g(x) = x^2 + 1$, **令** $u(x) = 1, v(x) = 1$, **则**
$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 2x^2$, **但** $2x^2 \nmid f(x)$.
当 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$ **且** $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$ **时**, **必有** $d(x)$ **为** $f(x), g(x)$ **的最大公因式**(**请读者自己证明**).
(2) $u(x), v(x)$ **均不唯一**, **如**: x **为** $f(x) = x^2 - x$ **与** $g(x) = x^2 + x$ **的最大公因式**,
$$x = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = -(\frac{1}{2} + x^2 + x)f(x) + (\frac{1}{2} + x^2 - x)g(x).$$
但是, **由** *Euclid* **算法计算出来的** $u(x), v(x)$ **都是唯一的**.

例 2

判断 $f(x)=x^3+x^2+2x+2$ 与 $g(x)=x^2-2x+2$ 是否互素.

例 2

判断 $f(x)=x^3+x^2+2x+2$ 与 $g(x)=x^2-2x+2$ 是否互素.

解 因为

$$f(x)=(x+3)g(x)+6x-4,$$
$$g(x)=(\frac{1}{6}x-\frac{2}{9})(6x-4)+\frac{10}{9},$$

所以 $(f(x),g(x))=1$.

定理 4

如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $f(x) \mid g(x)h(x)$, 那么
$$f(x) \mid h(x)$$

三、多项式互素的性质

性质 1

若 $(f(x), h(x)) = 1, (g(x), h(x)) = 1$, 则 $(f(x)g(x), h(x)) = 1$.

性质 2

若 $h(x) \mid f(x)g(x)$ 且 $(h(x), f(x)) = 1$, 则 $h(x) \mid g(x)$.

性质 2

若 $h(x) \mid f(x)g(x)$ 且 $(h(x), f(x)) = 1$, 则 $h(x) \mid g(x)$.

证明 因为 $(h(x), f(x)) = 1$, 所以存在 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)h(x) + v(x)f(x) = 1.$$

两边同乘 $g(x)$, 得

$$[u(x)g(x)]h(x) + v(x)[f(x)g(x)] = g(x).$$

因为 $h(x) \mid f(x)g(x)$, 所以 $h(x) \mid g(x)$.

性质 3

若 $g(x) \mid f(x), h(x) \mid f(x)$, 且 $(g(x), h(x)) = 1$, 则 $g(x)h(x) \mid f(x)$.

性质 3

若 $g(x) \mid f(x), h(x) \mid f(x)$, 且 $(g(x), h(x)) = 1$, 则 $g(x)h(x) \mid f(x)$.

证明　因为 $g(x) \mid f(x)$, 所以存在 $u(x)$, 使得 $f(x) = g(x)u(x)$.

又因为 $h(x) \mid g(x)u(x)$ 且 $(h(x), g(x)) = 1$,

故由性质 (2) 可得 $h(x) \mid u(x)$, 即存在 $v(x)$, 使得 $u(x) = h(x)v(x)$.

那么 $f(x) = [g(x)h(x)]v(x)$, 从而 $g(x)h(x) \mid f(x)$.

多个多项式的最大公因式

定义

如果多项式 $d(x)$ 满足以下两条:

(1) $d(x) \mid f_i(x), i = 1, 2, \cdots, s,$

(2) 若 $\varphi(x) \mid f_i(x), i = 1, 2, \cdots, s,$ 则 $\varphi(x) \mid d(x),$

那么称 $d(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 的一个最大公因式.

设 $d_0(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{s-1}(x)$ 的一个最大公因式, 则 $(d_0(x), f_s(x))$ 即为 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_{s-1}(x)$, $f_s(x)$ 的最大公因式,

亦即可逐次利用辗转相除法来求出多个多项式的最大公因式.

由上所述, 任意 s $(s \geq 2)$ 个多项式的最大公因式必定存在, 且能表示成该 s 个多项式的组合,

即存在 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{s} u_i(x) f_i(x) = d(x).$$

定义

若 $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)) = 1$, 则称 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 互素.

容易证明, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 互素当且仅当存在 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{s} u_i(x) f_i(x) = 1.$$

多个多项式互素时, 其中的多项式未必两两互素. 如下面的三个多项式:

$$f_1(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1),$$

$$f_2(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1),$$

$$f_3(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

不随属于的扩大而改变

多项式的最大公因式不因数域的扩大而改变, 从而多项式是否互素的关系也不因数域的扩大而改变.

证明 只证两个多项式的情况: 设 F, E 为两个数域, 且 $F \subseteq E, f(x), g(x) \in P[x]$, 若 $f(x) = g(x) = 0$, 显然;

若 $f(x), g(x)$ 不全为 0, 由定理 2 得, 不论把 $f(x), g(x)$ 看成 $F[x]$ 还是 $E[x]$ 中的多项式,

利用 Euclid 算法总可得一个最后的余式 $r_s(x)$, 故 $r_s(x)$ 既是 $f(x), g(x)$ 在 $F[x]$ 里的也是在 $E[x]$ 里的一个最大公因式.

因为利用 Euclid 算法求出的一系列带余除法式子不因数域的扩大而改变, 从而两个多项式的最大公因式也不因数域的扩大而改变.

最小公倍式

定义 (最小公倍式)

多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x), g(x)$ 的一个最小公倍式，如果
(1)$f(x)|m(x), g(x)|m(x)$,
(2)$f(x), g(x)$ 的任一公倍式都是 $m(x)$ 的倍式.

我们以 $[f(x), g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式.

最小公倍式与最大公因式密切相关，不难证明：如果 $f(x), g(x)$ 的首项系数都是 1,

那么 $[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$. (证明留给读者.)

§5 因式分解定理

本章主要是解决高次方程根的存在及求根问题，求根就要把多项式分解成不能再分的因式的乘积. 因式分解在中学中已有些方法，因式是否还能分解依赖于系数所在的数域 P，如

$$\begin{aligned} x^4-4 &\overset{\mathbf{Q}}{=} (x^2-2)(x^2+2) \\ &\overset{\mathbf{R}}{=} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2) \\ &\overset{\mathbf{C}}{=} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i) \end{aligned}$$

由此可见，必须明确系数域后，所谓不能再分才有确切的涵义.

先介绍一个重要的概念.

一、不可约多项式

定义

- 数域 P 上一个次数 ≥ 1 的多项式 $p(x)$ 称为 P 上的一个不可约多项式, 如果它不能表示成数域 P 上的两个次数均比它低的多项式的乘积;
- 否则, 即

$$p(x) = p_1(x)p_2(x),$$

其中 $\deg(p_i(x)) < \deg(p(x)), p_i(x) \in P[x], i = 1, 2$, 则称 $p(x)$ 为数域 P 上的一个可约多项式.

不可约多项式类似于正整数中的素数.

例 1

在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上 $x^2 - 2$ 不可约, 在实数域 $\mathbf{R}$ 上不可约.

一、不可约多项式

定义

- 数域 P 上一个次数 ≥ 1 的多项式 $p(x)$ 称为 P 上的一个不可约多项式, 如果它不能表示成数域 P 上的两个次数均比它低的多项式的乘积;
- 否则, 即
$$p(x) = p_1(x)p_2(x),$$
其中 $\deg(p_i(x)) < \deg(p(x)), p_i(x) \in P[x], i = 1, 2$, 则称 $p(x)$ 为数域 P 上的一个可约多项式.

不可约多项式类似于正整数中的素数.

例 1

在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上 $x^2 - 2$ 不可约, 在实数域 $\mathbf{R}$ 上不可约.

证明 假若 $x^2 - 2$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则 $x^2 - 2 = (x + a)(x + b)$, 且 $a, b \in \mathbf{Q}$, 那么 $a + b = 0, ab = -2$, 故 $b = -a$, 从而 $a^2 = 2$, 即 $a = \pm\sqrt{2}$, 矛盾. 所以 $x^2 - 2$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

但在实数域 $\mathbf{R}$ 上 $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$. 故一个多项式是否可约与所讨论的数域密切相关.

注

(1) 多项式是否可约与所讨论的数域 P 有关.

(2) 在任意数域上一次多项式总是不可约的, 如 $x, x+c$ 等.

(3) 零次多项式与 0 多项式不定义可约与不可约.

(4) 不可约多项式的因式只有两种:

- 非零常数,
- 自身的非零常数倍,

这两种因式称为平凡因式, 即不可约多项式只有平凡因式, 反之, 亦然.

下面讨论不可约多项式的性质.

性质 1

设 $p(x)$ 为数域 P 上的一个不可约多项式, 则对于任意的 $f(x) \in P[x]$, 要么 $p(x) \mid f(x)$, 要么 $(p(x), f(x)) = 1$.

定理 5

若不可约多项式 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则 $p(x)$ 整除 $f(x)$ 或者 $p(x)$ 整除 $g(x)$.

推论

若不可约多项式 $p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$, 则 $p(x)$ 必能整除 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 中的某一个.

二、因式分解定理

因式分解及唯一性定理

数域 P 上任意一个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积(也包括只有一个不可约因式的情况).
所谓唯一性是说，如果有两个分解式

$$f(x) = p_1(x) \cdots p_s(x) = q_1(x) \cdots q_t(x),$$

那么必有 $s = t$，并且适当排列因式的次序后，有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), i = 1, 2, \cdots, s,$$

其中 $c_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 是 P 中一些非零常数.

此定理在理论上是非常重要的，它是代数基本定理的基础.

但在实际应用中并未给出一个因式分解的切实可行的方法.

三、标准分解式

- 由因式分解定理，任意次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成一些不可约多项式的乘积，将 $f(x)$ 的首项系数提出来，使得每一个因式的首项系数均为 1，则 $f(x) = ap_1(x)\cdots p_s(x)$，再把相同的不可约因式合并起来得到
$$f(x) = ap_1^{k_1}(x)\cdots p_t^{k_t}(x),$$
其中 $p_1(x), \cdots, p_t(x)$ 是首项系数为 1 的、互不相同的不可约因式.
此称为 $f(x)$ 的**标准分解式**.
- 若 $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x) = a_0p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_r^{m_r}(x)$，则
$$g(x) \text{ 为 } f(x) \text{ 的因式当且仅当 } g(x) = b_0p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_r^{n_r}(x),$$
其中 b_0 为 $g(x)$ 的首项系数，$0 \le n_i \le m_i, i = 1, 2, \cdots, r$.
- 若两个多项式 $f(x), g(x)$ 均已化为标准分解式，则其最大公因式就很容易求了. 设
$$f(x) = ap_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots q_s^{k_s}(x),$$
$$g(x) = bp_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)h_{r+1}^{l_{r+1}}(x)\cdots h_t^{l_t}(x),$$
其中 $p_i(x)$ $(1 \le i \le r), q_j(x)$ $(r+1 \le j \le s), h_u(x)$ $(r+1 \le u \le t)$ 均为首项系数为 1 的、互不相同的不可约多项式，那么
$$(f(x), g(x)) = p_1^{m_1}(x)\cdots p_r^{m_r}(x),$$
其中 $m_i = min\{k_i, l_i\}, i = 1, 2, \cdots, r$.

§6 重因式

定义

设 $p(x)$ 是数域 P 上的一个不可约多项式, $f(x) \in P[x]$, k 为非负整数, 若 $p^k(x) \mid f(x)$, 但是 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$, 则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个k 重因式.

- $k = 0$ 时, $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式;
- $k = 1$ 时, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个单因式;
- $k > 1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个重因式.

注

- 重因式与 k 重因式的区别:
  - 重因式必为某 $k > 1$ 重因式,
  - 但 k 重因式不一定是重因式, 甚至未必是因式.
- 若 $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x) = cp_1^{r_1}(x) \cdots p_s^{r_s}(x)$, 则 $p_i(x)$ 是 $f(x)$ 的 r_i 重因式, $i = 1, 2, \cdots, s$, 其中 $r_i > 1$ 的那些不可约因式 $p_i(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.
- 不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式当且仅当 $f(x) = p^k(x)g(x)$, 其中 $(p(x), g(x)) = 1$.

定义

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是数域 P 上的一个多项式, 则称

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的**一阶导数**.

$f'(x)$ 的一阶导数称为 $f(x)$ 的**二阶导数**, 记为 $f''(x)$,

$\cdots\cdots$

$[f^{(k-1)}(x)]'$ 称为 $f(x)$ 的**k 阶导数**, 记为 $f^{(k)}(x)$.

注

- 若 $\deg(f(x))=n\ (n\geq 1)$, 则

  $$\deg(f'(x))=n-1,\deg(f''(x))=n-2,\cdots\cdots,\deg(f^{(n)}(x))=0.$$

  如 $f(x)=3x^3-2x^2+x-5$ 的各阶导数分别为

  $f'(x)=9x^2-4x+1, f''(x)=18x-4, f'''(x)=18.$
- 零次多项式与零多项式的导数为 0.

导数的基本公式:

(1) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,

(2) $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$,

(3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(4) $[f^m(x)]' = mf^{m-1}(x)f'(x)$.

定理 6

如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式 $(k \geq 1)$, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个 $k-1$ 重因式. 特别地, $f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

证明　只需证明 $p^{k-1}(x) \mid f'(x)$, 但 $p^k(x) \nmid f'(x)$.

因为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式, 所以 $f(x) = p^k(x)g(x), p(x) \nmid g(x)$. 那么

$$f'(x) = [p^k(x)]'g(x) + p^k(x)g'(x) = kp^{k-1}(x)p'(x)g(x) + p^k(x)g'(x) = p^{k-1}(x)[kp'(x)g(x) + p(x)g'(x)],$$

故 $p^{k-1}(x) \mid f'(x)$,

但是 $p(x) \nmid [kp'(x)g(x) + p(x)g'(x)]$, 从而 $p^k(x) \nmid f'(x)$, 即 $p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

特别地, $f(x)$ 的单因式是 $f'(x)$ 的 0 重因式, 故它不是 $f'(x)$ 的因式. ■

注

- 定理 6 的逆不真:
  如 $f(x) = x^3 - 1, f'(x) = 3x^2$, 显然 x 为 $f'(x)$ 的 2 重因式, 但它不是 $f(x)$ 的 3 重因式.
- 定理 6 的逆再适当加强条件后可以成立.
  若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个 $k-1$ 重因式, 且为 $f(x)$ 的一个因式, 则它是 $f(x)$ 的一个 k 重因式.

推论 1

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 $k(\geq 1)$ 重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

推论 2

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个公因式.

证明 $\Rightarrow$ 因为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个重因式, 不妨设为 k 重因式, 则 $k \geq 2$. 由定理 6 , $p(x)$ 为 $f'(x)$ 的一个 $k-1$ 重因式 $(k-1 \geq 1)$, 故它是 $f'(x)$ 的一个因式. 那么 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个公因式.

$\Leftarrow$ 已知 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个公因式. 下证 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个重因式: 否则, $p(x)$ 为 $f(x)$ 的一个单因式, 由定理 6 , $p(x)$ 不是 $f'(x)$ 的因式, 从而不是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式, 矛盾. 所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个重因式.

推论 3

多项式 $f(x)$ 无重因式当且仅当 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

证明 $\Rightarrow$ 反证法. 假设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个公因式, 则由推论 2 知,$p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个重因式. 与 $f(x)$ 无重因式矛盾. 故 $(f(x), f'(x)) = 1$.

$\Leftarrow$ 设 $(f(x), f'(x)) = 1$, 假若 $f(x)$ 有一个重因式 $p(x)$, 则由推论 2 知, $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式, 故 $p(x) \mid 1$, 这与 $p(x)$ 是不可约多项式矛盾. 从而 $f(x)$ 无重因式.

三、分离重因式

设 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x), r_i > 0, i = 1, 2, \cdots, s,$$

则 $(f(x), f'(x))$ 的标准分解式为

$$p_1^{r_1-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x).$$

则

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)\cdots p_s(x).$$

这个多项式无重因式, 但与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式.

此法是一个去掉重因式的有效方法, 称为分离重因式法. 它有助于分解因式.

例 1

求出 $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ 的标准分解式.

例 1

求出 $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ 的标准分解式.

解 因为 $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$,

$$(f(x), f'(x)) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1),$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = (x-1)(x+1) = x^2 - 1.$$

所以 $x - 1, x + 1$ 分别为 $f(x)$ 的 3 重和 2 重因式.

从而 $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2$.

例 2

b 应该满足什么条件, 才使得 $f(x) = x^3 + 3ax + b$ 有重因式?

例 2

b 应该满足什么条件, 才使得 $f(x) = x^3 + 3ax + b$ 有重因式?

解 因为 $f'(x) = 3x^2 + 3a$, 用 $f'(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式为 $r_1(x) = 2ax + b$.

若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 有重因式当且仅当 $r_1(x) = 0$, 即 $a = b = 0$. 此时 $f(x) = x^3$ 有重因式 x.

若 $a \neq 0$, 则 $r_1(x)$ 是一个 1 次多项式, 用 $r_1(x)$ 除 $f'(x)$, 得余式 $r_2(x) = 3a + \frac{3b^2}{4a^2}$.

则此时 $f(x)$ 有重因式当且仅当 $r_2(x) = 0$, 即 $4a^3 + b^2 = 0$.

综上所述, $f(x)$ 有重因式当且仅当 $4a^3 + b^2 = 0$.

设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x], c \in P$,

用 c 代替 x 得 $f(c) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$,

从而对于任意的 $c \in P, P$ 中存在唯一的数 $f(c)$ 与之对应, 即得 P 到自身的一个映射.

定义

由 $P[x]$ 中一个多项式 $f(x)$ 确定的 P 到 P 的映射:$c \longmapsto f(c)$ 称为数域 P 上的一个多项式函数.

设 $f(x), g(x) \in P[x], c \in P$, 由多项式的相等及加法、乘法定义可得:

- 若 $f(x) = g(x)$, 则 $f(c) = g(c)$,
- 若 $h_1(x) = f(x) \pm g(x), h_2(x) = f(x)g(x)$, 则 $h_1(c) = f(c) \pm g(c), h_2(c) = f(c)g(c)$.

定理 7

余数定理: 用一次式 $x-c$ 去除 $f(x)$ 所得的余数等于 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的函数值 $f(c)$.

证明 由带余除法定理, 用 $x-c$ 去除 $f(x)$ 所得余式为常数 r, 商式设为 $q(x)$, 则 $f(x)=(x-c)q(x)+r$. 取 $x=c$, 得 $f(c)=(c-c)q(c)+r=r$. ■

那么如何求 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的商式 $q(x)$ 呢?

现设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

则由

$$f(x)=q(x)(x-c)+r=(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)(x-c)+r$$

可得

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$

$$b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_1 - cb_2)x^2 + (b_0 - cb_1)x + r - b_0 c.$$

比较两端同次项系数可得

$$\left\{\begin{array}{c} a_n = b_{n-1}, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}, \\ \vdots \\ a_k = b_{k-1} - cb_k, \\ \vdots \\ a_1 = b_0 - cb_1, \\ a_0 = r - cb_0, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}, \\ \vdots \\ b_{k-1} = a_k + cb_k, \\ \vdots \\ b_0 = a_1 + cb_1, \\ r = a_0 + cb_0. \end{array}\right.$$

这样, 欲求系数 b_{k-1}, 只需前一个系数 b_k 乘 c 再加上 a_k 即可. 可由下表容易地求出

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & cb_{n-1} & \cdots & cb_2 & cb_1 & cb_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 & r \end{array}$$

此法称为**综合除法**.

例 1

求 $x+3$ 除 $f(x)=x^4+x^2+4x-9$ 所得商式及余数.

例 1

求 $x+3$ 除 $f(x)=x^4+x^2+4x-9$ 所得商式及余数.

解 用综合除法:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & 1 & 0 & 1 & 4 & -9 \\
 & & -3 & 9 & -30 & 78 \\
\hline
 & 1 & -3 & 10 & -26 & 69
\end{array}
$$

故商式 $q(x)=x^3-3x^2+10x-26$, 余数 $r=69$.

例 2

将 $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 9$ 表示成 $x + 3$ 的方幂和的形式.

例 2

将 $f(x)=x^4+x^2+4x-9$ 表示成 $x+3$ 的方幂和的形式.

解

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & 1 & 0 & 1 & 4 & -9 \\
 & & -3 & 9 & -30 & 78 \\
\hline
 & 1 & -3 & 10 & -26 & 69 \\
 & & -3 & 18 & -84 & \\
\hline
 & 1 & -6 & 28 & -110 & \\
 & & -3 & 27 & & \\
\hline
 & 1 & -9 & 55 & & \\
 & & -3 & & & \\
\hline
 & 1 & -12 & & &
\end{array}
$$

$$f(x)=(x+3)^4-12(x+3)^3+55(x+3)^2-110(x+3)+69.$$

定义

设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中的一个多项式，而 c 为数域 P 中的一个数，若 $x=c$ 时，$f(x)$ 的值 $f(c)$ 等于 0，那么 c 就叫做 $f(x)$ 在 P 中的一个**根**.

推论

c 为 $f(x)$ 的一个根当且仅当 $(x-c)\mid f(x)$.

证明 $\Rightarrow$ 因为 c 是 $f(x)$ 的一个根，故 $f(c)=0$. 但由余数定理，$f(c)$ 为 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的余数 r，故 $r=0$. 从而 $(x-c)\mid f(x)$.

$\Leftarrow$ 因为 $(x-c)\mid f(x)$，所以 $f(x)=(x-c)q(x)+0$，故 $f(c)=0$，即 c 为 $f(x)$ 的一个根

此结论将一次因式与根紧密地联系起来.

定义

若 $x-c$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式，则称 c 是 $f(x)$ 的一个 k 重根 $(k \geq 1)$.

- $k=1$ 时，c 为 $f(x)$ 的一个单根;
- $k>1$ 时，c 为 $f(x)$ 的一个重根.
  从而 $k>1$ 时，若 c 为 $f(x)$ 的一个 k 重根，则 c 必为 $f'(x)$ 的一个 $k-1$ 重根.

定理 8

数域 P 上 n 次多项式 $f(x)$ 在 P 中最多有 n 个根 (k 重根按 k 个计算).

证明 $n=0$ 时，$f(x)$ 是零次多项式，它在 P 上根的个数为 0，显然成立.

$n>0$ 时，$f(x)$ 为一个次数 >0 的多项式，由因式分解定理，$f(x)$ 可以分解为 P 上一些不可约多项式的乘积. 令 $(x-c_1),(x-c_2),\cdots,(x-c_s)$ 是出现在 $f(x)$ 的标准分解式中所有互不相同的一次式，并设它们的重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，则

$$f(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_s)^{k_s}g(x),$$

其中 $g(x)$ 无一次因式.

因此 $f(x)$ 在 P 中的根只能是 $c_1,c_2,\cdots,c_s$，它们的重数分别为 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_s$. 故由 (1) 式得

$$\sum_{i=1}^{s} k_i \leq n=\deg(f(x)).$$

由上可知, 每个多项式函数都可由一个多项式来定义. 那么不同的多项式会不会定义出相同的函数呢? 下面的定理给出了一个否定的回答.

定理 9

设 $f(x), g(x)$ 的次数不超过 n, 而它们对于 P 中 $n+1$ 个互不相同的数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$ 都有相同的函数值, 即 $f(c_i) = g(c_i), 1 \leq i \leq n+1$, 那么 $f(x) = g(x)$.

证明 令 $u(x) = f(x) - g(x)$, 欲证 $f(x) = g(x)$, 只要证明 $u(x) = 0$. 因为

$$u(c_i) = f(c_i) - g(c_i) = 0, 1 \leq i \leq n+1,$$

故 $u(x)$ 在 P 中至少有 $n+1$ 个根. 若 $f(x) \neq g(x)$, 则 $u(x) = f(x) - g(x) \neq 0$, 那么由次数定理及

$$\max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\} \leq n$$

得 $\deg(u(x)) \leq n$, 即 $u(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式, 但它在 P 中至少有 $n+1$ 个根, 与定理 8 矛盾. 从而必有 $u(x) = 0$, 即 $f(x) = g(x)$. ■

§8 复系数多项式与实系数多项式的因式分解

$$
\begin{aligned}
x^4-4 &\overset{\mathbf{Q}}{=} (x^2-2)(x^2+2) \\
&\overset{\mathbf{R}}{=} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2) \\
&\overset{\mathbf{C}}{=} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)
\end{aligned}
$$

- 前面我们在任意数域 P 上讨论了多项式的因式分解与根.
- 已知数域 P 上任意一个次数为 n 的多项式在 P 上最多有 n 个根, 但它在 P 上是否有根, 并不确定.
- 这些结论在复数域和实数域上都是成立的.
- 但这两个数域都是特殊的数域, 都有它们各自的特点, 所以有必要来讨论它们具体的属性.

一、复系数多项式的因式分解

在复数域 $\mathbf{C}$ 上有下面的结论.

代数基本定理

每一个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域 $\mathbf{C}$ 上至少有一个根.

1797 年, 德国数学家 Gauss 首次给出了此定理的证明.

将来学过复变函数后讲可以很简单地证明.

由根与一次式的关系可得, 与代数基本定理等价的说法是:

任一次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域 $\mathbf{C}$ 上一定有一个一次式作为其因式.

复系数多项式因式分解定理

每一个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上都能分解成一次多项式的乘积.

证明　只要证明在复数域上次数 ≥ 2 的多项式全是可约的.

设 $\deg(f(x)) \geq 2$, 由代数基本定理, $f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 中至少有一个根, 设 c 为其一个根, 即 $f(c) = 0$.

由根与一次式的关系可得 $(x-c) \mid f(x)$, 故有 $q(x)$, 使得 $f(x) = (x-c)q(x)$, 即 $f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上可约.

从而在复数域 $\mathbf{C}$ 上只有一次式才是不可约多项式, 故任一次数 ≥ 1 的复系数多项式都可分解成一次多项式的乘积. ■

复系数多项式 $f(x)$ 的标准分解式:

$$f(x) = a(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_s)^{k_s},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_s$ 为复数, $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为正整数.

设 $\deg(f(x)) = n$. 当 $n \geq 1$ 时, 由 $f(x)$ 的典型分解式及根与一次式的关系知, c_i 为 $f(x)$ 的 k_i 重根, 且 $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$. 故 n 次多项式 $f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上恰有 n 个根.

下面讨论根与系数的关系. 在中学里有著名的韦达定理, 现在也来讨论此类问题.

设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0})$

$= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$,
其中 $a_0 \neq 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $f(x)$ 的 n 个根.

比较两端系数, 得

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_0} = -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i, \\ \frac{a_2}{a_0} = \sum\limits_{1\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j, \\ \qquad \vdots \\ \frac{a_k}{a_0} = (-1)^k \sum\limits_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} \\ \qquad \vdots \\ \frac{a_n}{a_0} = (-1)^n\alpha_1\cdots\alpha_n. \end{cases}$$

它称为韦达公式.

虚根成对定理

如果实系数多项式有虚根 α，则 α 的共轭数 $\overline{\alpha}$ 必定是 $f(x)$ 的一个根，且 α 与 $\overline{\alpha}$ 有相同的重数.

证明 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 因为 α 是 $f(x)$ 的一个根，故 $f(\alpha)=0$，即

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0.$$

两边取共轭，可得

$$\overline{a_n}\ \overline{\alpha}^n+\overline{a_{n-1}}\ \overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+\overline{a_1}\ \overline{\alpha}+\overline{a_0}=0.$$

又因为 $a_i\in\mathbf{R}$，所以 $\overline{a_i}=a_i$，$0\le i\le n$. 故有

$$a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0=0,$$

即 $f(\overline{\alpha})=0$，亦即 $\overline{\alpha}$ 为 $f(x)$ 的一个根，从而

$$(x-\alpha),(x-\overline{\alpha})\mid f(x).$$

又 $\alpha\ne\overline{\alpha}$，故 $(x-\alpha,x-\overline{\alpha})=1$，那么 $f(x)$ 可被 $g(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ 整除.
由共轭数的性质易知，$g(x)$ 的系数均为实数. 故存在 $h(x)\in\mathbf{R}[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$. ■

实系数多项式的因式分解定理

(实系数多项式的因式分解定理) 每一个次数 ≥ 1 的实系数多项式在实数域 $\mathbf{R}$ 上都能唯一地分解成一次式与某些二次不可约多项式的乘积.

证明 对多项式的次数用数学归纳法. 对于一次多项式, 结论显然成立.

假设结论对于次数 $< n$ 的多项式成立, 那么对于 n 次多项式 $f(x)$, 由代数基本定理, $f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上至少有一个根 α.

- 若 α 为一个实数, 则在 $\mathbf{R}[x]$ 中 $f(x) = (x - \alpha)f_1(x)$, 且 $\deg(f_1(x)) < n$. 由归纳假设, $f_1(x)$ 可以分解成一次与二次不可约因式的乘积, 从而 $f(x)$ 亦然.
- 若 α 为一个虚数, 则 $\overline{\alpha}$ 亦为 $f(x)$ 的一个根且 $\alpha \neq \overline{\alpha}$. 故
$$f(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})f_2(x) = [x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}]f_2(x).$$
因为 $g(x) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha} \in \mathbf{R}[x]$, 且它在 $\mathbf{R}$ 上不可约, 而 $f_2(x)$ 为次数 $< n$ 的一个实系数多项式. 由归纳假设, $f_2(x)$ 可以分解成一次因式与某些二次不可约多项式的乘积, 从而 $f(x)$ 亦然.

由数学归纳法原理, 结论得证. ■

注

- 设 $f(x) = x^2 + px + q \in \mathbf{R}[x]$, 则 $f(x)$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上不可约当且仅当 $p^2 - 4q < 0$.
- 实系数多项式 $f(x)$ 的标准分解式:

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r},$$

其中 $\alpha_i, p_j, q_j \in \mathbf{R}, k_i, l_j$ 为正整数, $p_j^2 - 4q_j < 0,\ 1 \le i \le s, 1 \le j \le r$.

例 1

求 $x^n - 1$ 分别在实数域 R 和复数域 C 上的分解式.

例 1

求 x^n-1 分别在实数域 R 和复数域 C 上的分解式.

解 满足 $\omega^n=1$ 的复数 ω 称为一个 n 次单位根, 它共有 n 个:

$$\omega_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}=cos\frac{2k\pi}{n}+i\,sin\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\cdots,n-1.$$

显然任意 n 次单位根 ω 的模都是 1, 所以 $\omega\cdot\overline{\omega}=1$.

若 $\omega^n=1$ 且对于任意的 $1\le i<n,\omega^i\ne 1$, 则称 ω 为一个 n 次单位原根. 如 $\omega_1=cos\frac{2\pi}{n}+i\,sin\frac{2\pi}{n}$ 就是一个 n 次单位原根.

若 ω 为一个 n 次单位原根, 则 $\omega^0,\omega^1,\cdots,\omega^{n-1}$ 为全部的 n 次单位根. 反之, 亦然.

在复数域 C 上,

$$x^n-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_1^2)\cdots(x-\omega_1^{n-1}).$$

因为

$$\begin{aligned}\overline{\omega_1^k}&=cos\frac{2k\pi}{n}-i\,sin\frac{2k\pi}{n}\\&=cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\,sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=\omega_1^{n-k},\end{aligned}$$

故在实数域 R 上, 当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned} x^n-1 &= (x-1)[(x-\omega_1)(x-\omega_1^{n-1})]\cdot[(x-\omega_1^2)(x-\omega_1^{n-2})]\cdots[(x-\omega_1^{\frac{n-1}{2}})(x-\omega_1^{\frac{n+1}{2}})] \\ &= (x-1)(x^2-2xcos\frac{2\pi}{n}+1)(x^2-2xcos\frac{4\pi}{n}+1)\cdot\cdots(x^2-2xcos\frac{n-1}{n}\pi+1). \end{aligned}$$

当 n 为偶数时, 因为

$$\omega_1^{\frac{n}{2}}\omega_1^{\frac{n}{2}}=\omega_1^{\frac{n}{2}}\overline{\omega_1^{\frac{n}{2}}}=1.$$

所以, 有

$$\omega_1^{\frac{n}{2}}=\overline{\omega_1^{\frac{n}{2}}}.$$

那么

$$\omega_1^{\frac{n}{2}}=(cos\frac{2\pi}{n}+isin\frac{2\pi}{n})^{\frac{n}{2}}=-1.$$

从而

$$\begin{aligned} x^n-1=(x-1)(x+1)(x^2-2xcos\frac{2\pi}{n}+1)\cdot \\ (x^2-2xcos\frac{4\pi}{n}+1)\cdots(x^2-2xcos\frac{n-2}{n}\pi+1). \end{aligned}$$

有理系数多项式的因式分解定理: 每个次数 ≥ 1 的有理系数多项式一定能唯一地分解成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约因式的乘积.

问: 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上什么样的多项式才是不可约的?

要回答这个问题不是件容易的事情, 这一点与实数域和复数域是不同的 (在复数域上只有一次式不可约, 在实数域上只有一次式和某些二次式不可约).

本节将证明,

- 有理系数多项式的因式分解可归结为整系数多项式的因式分解问题;
- 如何判别、求出有理系数多项式的有理根;
- 举例说明存在 n 次不可约有理系数多项式.

首先来讨论有理系数多项式与整系数多项式之间的关系:

对于任意的 $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, 设 k 是 $f(x)$ 的所有系数的分母的最小公倍数, 则 $kf(x)$ 是一个整系数多项式, 且满足:

(1) $f(x)$ 与 $kf(x)$ 有相同的可约性,

(2) $f(x)$ 与 $kf(x)$ 有相同的根.

那么 $\mathbf{Q}[x]$ 中多项式的可约性问题就转化为整系数多项式的可约性问题.

一、本原多项式

定义

若一个非零的整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 的系数 $b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1, b_0$ 没有异于 ±1 的公因数，即它们互素，则称 $g(x)$ 为一个本原多项式.

如 $2x^4+3x^3+4x^2+6x+8$ 是一个本原多项式，$4x^2+6x+8$ 不是本原多项式. 由定义可得

性质

在有理数域上任意一个非零多项式 $f(x)$ 都可以表示成一个有理数与一个本原多项式的乘积，且在相差一个 $\pm$ 号的意义下表示法唯一.

例如

$$\frac{4}{5}x^2-2x+\frac{2}{3}=\frac{2}{15}\left(6x^2-15x+5\right).$$

证明　(存在性) 将 $f(x)$ 的所有系数都写成既约分数，并设 c 是 $f(x)$ 的所有系数的分母的最小公倍数，d 是 $cf(x)$ 的系数的最大公因数. 则

$$f(x)=\frac{1}{c}[cf(x)]=\frac{d}{c}\varphi(x),$$

其中 $g(x)=cf(x)$ 是一个整系数多项式，而 $\varphi(x)$ 是一个本原多项式.

(唯一性) 假设 $f(x)=r\varphi(x)=r_1\varphi_1(x)$, 其中 $r, r_1\in\mathbf{Q}$, $\varphi(x), \varphi_1(x)$ 都是本原多项式.

设 $r=\frac{d}{c}, r_1=\frac{d_1}{c_1}$ 都是既约分数, 其中 c, d, c_1, d_1 均为非零整数.

由 $\frac{d}{c}\varphi(x)=\frac{d_1}{c_1}\varphi_1(x)$, 即得

$$c_1 d\varphi(x)=cd_1\varphi_1(x)\triangleq f_1(x),$$

那么 $f_1(x)$ 是一个整系数多项式. 由于 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 均为本原多项式, 故 $c_1 d, cd_1$ 均可看作 $f_1(x)$ 的所有系数的最大公因数, 从而 $c_1 d=\pm cd_1$, 即 $\frac{d}{c}=\pm\frac{d_1}{c_1}$, 亦即 $r=\pm r_1$, 那么 $\varphi(x)=\pm\varphi_1(x)$.

综上所述, 我们将有理系数多项式的因式分解问题转化为整系数多项式的因式分解问题.

定理 10 (Gauss 引理)

两个本原多项式的乘积还是本原多项式，即若

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

都是本原多项式，则 $h(x) = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$ 也是一个本原多项式，其中 $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

证明 用反证法. 假设 $h(x)$ 不是本原的，即 $h(x)$ 的各项系数的最大公因数 $d > 1$，

那么一定存在一个素数 $p, p \mid d$，即 p 为 $h(x)$ 的各项系数的一个公因数.

因为 $f(x)$ 是一个本原多项式，故 p 不能整除 $f(x)$ 的所有系数，

即 $f(x)$ 至少有一个系数不能被 p 整除.

假设 a_i 是序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 中第一个不能被 p 整除的系数，

即 $p \mid a_0, p \mid a_1, \cdots, p \mid a_{i-1}$，但 $p \nmid a_i$.

又由 $g(x)$ 也是一个本原多项式, 故 p 不能整除 $g(x)$ 的所有系数,

即 $g(x)$ 至少有一个系数不能被 p 整除.

设 b_j 是 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 中第一个不能被 p 整除的系数, 即 $p \mid b_0, p \mid b_1, \cdots, p \mid b_{j-1}$, 但 $p \nmid b_j$.

现在考察 $h(x)$ 中 $i+j$ 次项系数

$$c_{i+j} = \sum_{s+t=i+j} a_s b_t = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + \cdots + a_{i-1} b_{j+1} + a_i b_j + a_{i+1} b_{j-1} + \cdots + a_{i+j} b_0,$$

因为 $p \mid c_{i+j}, p \mid a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{j-1}$, 所以 $p \mid a_i b_j$.

又 p 是一个素数, 故 $p \mid a_i$ 或 $p \mid b_j$, 矛盾.

从而 $h(x)$ 是一个本原多项式. ■

定理 11

一个非零整系数多项式能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积当且仅当它能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

证明 $\Leftarrow$ 显然.

$\Rightarrow$ 设 $f(x)$ 是一个非零整系数多项式, $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x),h(x)\in\mathbf{Q}[x]$, 并且 $\max\{\deg(g(x)),\deg(h(x))\}<\deg(f(x))$. 令

$$f(x)=af_1(x),g(x)=sg_1(x),h(x)=rh_1(x),$$

其中 $a\in\mathbf{Z},s,r\in\mathbf{Q},f_1(x),g_1(x),h_1(x)$ 均为本原多项式. 则

$$f(x)=af_1(x)=srg_1(x)h_1(x),$$

即 $\frac{a}{sr}f_1(x)=g_1(x)h_1(x)$. 因为 $f_1(x),g_1(x),h_1(x)$ 都是本原多项式, 由 Gauss 引理, $g_1(x)h_1(x)$ 也是一个本原多项式, 所以 $\frac{a}{sr}=\pm1$, 即 $sr=\pm a$, 故 sr 是一个非零整数. 从而

$$f(x)=srg_1(x)h_1(x)=[srg_1(x)]h_1(x),$$

即 $f(x)$ 可以分解为两个次数都比它低的的整系数多项式的乘积. ∎

由此可得, 非零整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约当且仅当 $f(x)$ 在整数环 $\mathbf{Z}$ 上可约.

此定理的证明过程中充分体现了 Gauss 引理的重要性.

推论

如果非零整系数多项式 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x)$ 是一个本原多项式, 那么 $h(x)$ 一定是一个整系数多项式.

推论

如果非零整系数多项式 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x)$ 是一个本原多项式, 那么 $h(x)$ 一定是一个整系数多项式.

证明 因为 $g(x)$ 是一个本原多项式, 故在定理 14 的证明过程中, $s = \pm 1$. 那么 $r = \pm a$ 是一个非零整数. 从而 $h(x) = rh_1(x) = \pm ah_1(x)$ 是一个整系数多项式. ■

二、有理系数多项式的有理根的求法

定理 12

如果有理数 $\frac{r}{s}$ (其中 s, r 互素) 是整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的一个有理根, 则必有 $s \mid a_n, r \mid a_0$.

特别地, 当 $a_n = 1$ 时, 有理根一定是整数根.

证明 因为有理数 $\frac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根且 $(r, s) = 1$, 由根与一次因式的关系知, 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上, $(x - \frac{r}{s}) \mid f(x)$, 那么 $(sx - r) \mid f(x)$.

故存在 $g(x) \in \mathbf{Q}[x], f(x) = (sx - r)g(x)$, 但 $sx - r$ 是一个本原多项式, 那么由定理 11 的推论得知, $g(x)$ 是一个整系数多项式. 设

$$g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, b_i \in \mathbf{Z}, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

则

$$f(x) = (sx - r)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = sb_{n-1}x^n + \cdots - rb_0.$$

比较首项与常数项的系数, 可得 $a_n = sb_{n-1}, a_0 = -rb_0$, 从而 $s \mid a_n, r \mid a_0$, 即 (1) 成立.

又

$$f(x) = (sx - r)g(x) = (x - \frac{r}{s})[s \cdot g(x)] = (x - \frac{r}{s})f_1(x),$$

显然 $f_1(x)$ 是一个整系数多项式. ■

推论

首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$ 若有有理根, 则必为整数根.

设整系数多项式 $f(x)$ 有有理根 $\frac{r}{s}$ (其中 $(r,s)=1$). 因为 $s\mid 1$, 所以 $s=\pm 1$. 故 $\frac{r}{s}=\pm r\in\mathbf{Z}$.

推论

整系数多项式的整数根必为常数项的因数.

例 1

求多项式 $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 8x - 3$ 的有理根.

例 1

求多项式 $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 8x - 3$ 的有理根.

解　因为 2 的所有因数为 $\pm1, \pm2$, 且 -3 的所有因数为 $\pm1, \pm3$, 那么 $f(x)$ 的有理根必在

$$\{\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\}.$$

经检验, -1 和 3 是 $f(x)$ 的有理根, 且

$$f(x) = (x+1)(x-3)(2x^2+2x+1).$$

例 2

求多项式 $f(x) = 6x^3 - 22x^2 + 16x + 8$ 的有理根.

例 1

求多项式 $f(x)=2x^4-2x^3-9x^2-8x-3$ 的有理根.

解 因为 2 的所有因数为 $\pm1,\pm2$, 且 -3 的所有因数为 $\pm1,\pm3$, 那么 $f(x)$ 的有理根必在

$$\{\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\}.$$

经检验, -1 和 3 是 $f(x)$ 的有理根, 且

$$f(x)=(x+1)(x-3)(2x^2+2x+1).$$

例 2

求多项式 $f(x)=6x^3-22x^2+16x+8$ 的有理根.

解 $f(x)=2(3x^3-11x^2+8x+4)$. 因为 3 的所有因数为 $\pm1,\pm3$, 且 4 的所有因数为 $\pm1,\pm2,\pm4$, 那么 $f(x)$ 的有理根必在

$$\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3}\}.$$

经检验, -1 和 3 是 $f(x)$ 的有理根, 且 $f(x)=2(3x+1)(x-2)^2$. 因此, $f(x)$ 所有的有理根为 $-\frac{1}{3},2,2$.

例 1

求多项式 $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 8x - 3$ 的有理根.

解 因为 2 的所有因数为 $\pm1, \pm2$, 且 -3 的所有因数为 $\pm1, \pm3$, 那么 $f(x)$ 的有理根必在

$$\{\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\}.$$

经检验, -1 和 3 是 $f(x)$ 的有理根, 且

$$f(x) = (x+1)(x-3)(2x^2+2x+1).$$

例 2

求多项式 $f(x) = 6x^3 - 22x^2 + 16x + 8$ 的有理根.

解 $f(x) = 2(3x^3 - 11x^2 + 8x + 4)$. 因为 3 的所有因数为 $\pm1, \pm3$, 且 4 的所有因数为 $\pm1, \pm2, \pm4$, 那么 $f(x)$ 的有理根必在

$$\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\}.$$

经检验, -1 和 3 是 $f(x)$ 的有理根, 且 $f(x) = 2(3x+1)(x-2)^2$. 因此, $f(x)$ 所有的有理根为 $-\frac{1}{3}, 2, 2$.

例 3

设 p 是一个奇素数, 证明多项式 $f(x) = x^3 - px + 1$ 在有理数域上不可约.

例 3

设 p 是一个奇素数, 证明多项式 $f(x)=x^3-px+1$ 在有理数域上不可约.

证明 用反证法. 假若 $f(x)=x^3+px+1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 必能分解成一个一次式与一个二次式的乘积, 从而 $f(x)$ 有有理根, 那么 $f(x)$ 的有理根只能在 $\{\pm 1\}$ 中, 但 $f(1)=2+p\neq 0, f(-1)=p\neq 0$, 矛盾. 故 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约. ■

那么 b 取何值时, 整系数多项式 $f(x)=x^3+bx+1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约?

例 3

设 p 是一个奇素数, 证明多项式 $f(x) = x^3 - px + 1$ 在有理数域上不可约.

证明 用反证法. 假若 $f(x) = x^3 + px + 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 必能分解成一个一次式与一个二次式的乘积, 从而 $f(x)$ 有有理根, 那么 $f(x)$ 的有理根只能在 $\{\pm 1\}$ 中, 但 $f(1) = 2 + p \neq 0, f(-1) = p \neq 0$, 矛盾. 故 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约. ■

那么 b 取何值时, 整系数多项式 $f(x) = x^3 + bx + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约?

因为 $f(1) = 2 + b, f(-1) = -b$, 所以只有当 $b = -2$ 或 $b = 0$ 时, $f(x) = x^3 - bx + 1$ 在有理数域上才可约

定理 13 (Eisenstein 判别法)

对于一个非零整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

如果存在一个素数 p, 使得

(1) $p \nmid a_n$, (2) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$, (3) $p^2 \nmid a_0$,

则 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 用反证法. 假设 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约. 由定理 14 , $f(x)$ 可分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积: $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x]$, 且

$$\max\{\deg(g(x)), \deg(h(x))\} < \deg(f(x)).$$

设

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

$$h(x) = c_l x^l + c_{l-1}x^{l-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

则
$$f(x)=(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)(c_lx^l+c_{l-1}x^{l-1}+\cdots+c_1x+c_0).$$

那么 $a_n=b_mc_l, a_0=b_0c_0$.

因为 $p\mid a_0$, 即 $p\mid b_0c_0$, 而 p 是一个素数, 故 $p\mid b_0$ 或 $p\mid c_0$.

但 $p^2\nmid a_0$, 从而 p 不能同时整除 b_0 和 c_0.

不妨设 $p\mid b_0$, 但 $p\nmid c_0$. 又因为 $p\nmid a_n$, 即 $p\nmid b_mc_l$, 所以 $p\nmid b_m$, 从而 p 不能同时整除 $g(x)$ 的各项系数.

假设 b_k 是 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 中第一个不能被 p 整除的系数, 即 $p\mid b_0,b_1,\cdots,b_{k-1}$, 但 $p\nmid b_k$(显然 $k\le m$).

考察 $f(x)$ 的 k 次项系数
$$a_k=b_0c_k+b_1c_{k-1}+\cdots+b_kc_0,$$
由于 $p\mid a_k, p\mid b_0,b_1,\cdots,b_{k-1}$, 那么 $p\mid b_kc_0$. 而 p 为一个素数, 故 $p\mid b_k$ 或 $p\mid c_0$, 矛盾.

从而 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约. ■

注

(1) 由 *Eisenstein* 判别法可知, 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上存在任意次数的不可约多项式. 如 x^n+2, 取 $p=2$, 由 *Eisenstein* 判别法, 它在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

(2) *Eisenstein* 判别法的局限性: 此法并非对一切整系数多项式都适用, 因为满足定理的素数 p 不总是存在. 若找不到适当的素数 p, 则 $f(x)$ 的可约性就无法确定. 如 x^2+3x+2, x^2+1 都找不到满足条件的素数 p, 但前者在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约, 后者不可约. 故它的逆不真.

(3) 对于有些多项式 $f(x)$ 来说, 有时它不能直接应用 *Eisenstein* 判别法, 但适当变形后就可以应用 *Eisenstein* 判别法. 此时一般是作一次变换.

例 4

设 p 是一个素数, 则本原多项式

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

例 4

设 p 是一个素数, 则本原多项式

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 令 $x=y+1$. 因为 $f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$, 所以

$$g(y)=f(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{y}=\frac{y^p+c_p^1y^{p-1}+\cdots+c_p^{p-1}y}{y}=y^{p-1}+c_p^1y^{p-2}+\cdots+c_p^{p-1}.$$

对于素数 p 用 Eisenstein 判别法, 因为 1° $p\nmid 1$, 2° $c_p^i=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$ 可被 p 整除, $i=1,2,\cdots,p-1$, 3° $p^2\nmid c_p^{p-1}=p$, 故 $g(y)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 那么 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上也不可约: 否则, 存在 $h_1(x),h_2(x)\in Q[x]$, 使得

$$f(x)=h_1(x)h_2(x),\deg(h_i(x))<\deg(f(x)),i=1,2,$$

那么 $g(y)=f(y+1)=h_1(y+1)h_2(y+1)$, 故 $g(y)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约, 矛盾.

注

(4) *Eisenstein* 判别法是针对整系数多项式的, 那么如何判断有理系数多项式的可约性呢?
——首先把 $f(x)$ 写成一个有理数与一个本原多项式的乘积 $f(x)=a\varphi(x)$, 再判断 $\varphi(x)$ 的可约性.

例 5

$f(x)=2x^4+\frac{8}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{15}x-\frac{4}{5}=\frac{2}{15}(15x^4+20x^3+10x^2+8x-6)=\frac{2}{15}\varphi(x)$,
取 $p=2$, 则 1° $p\nmid 15$, 2° $p\mid 20,10,8,(-6)$, 3° $p^2\nmid(-6)$,
故由 *Eisenstein* 判别法可知, $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.