第三章练习题部分答案

一.填空题.

1. $\alpha=(\frac{2}{3},1,-2)$. 2. (1) 线性相关. (2) 线性相关. (3) 线性无关.

3. $a\neq 3$. 4. $a=-1$. 5. $t\neq\dfrac{5}{2}$. 6. $a=-2$. 7. $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma)=r+1$.

8. (I) $k(1,1,\cdots,1)^T$,其中k任意. (II) $r(A)=0$. 9. $(1,1,1,1)^T+k(1,-1,-1,-1)^T$,其中$k$任意.

10. $a=-2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-a&3\\2&0&-3&1\\-2&a&10&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-3&1\\0&-1&\frac{3}{2}-a&\frac{5}{2}\\0&0&\frac{3}{2}a-a^2+7&5+\frac{5}{2}a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-3&1\\0&-1&\frac{3}{2}-a&\frac{5}{2}\\0&0&-(a+2)(2a-7)&10+5a\end{array}\right)$$

11. $a=-1$. $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a+1)(a-3)&a-3\end{array}\right)$

12. $\lambda=1$时,方程组无解;当$\lambda=0$时,方程组有无穷多解.

13. $r(A)=3$,只有零解;当且仅当$r(A)<3$时,方程组有非零解,$3-r(A)$.

14. $r(A)=r(A,\beta)<n$. 15. $\lambda\neq 1$. 16. $a_1+a_2+a_3=0$. 17. $r(A)=2,a=1$或$a=-\dfrac{3}{2}$.

18. $m\leq n$. 19. $r(A)=5$. 20. $k=1$. 21. r或$r+1$. 22. $n-r$.

23.系数矩阵列满秩,或系数矩阵列向量组线性无关. 24. $|A|=0$或$r(A)<n$. 25. s.

二.计算题:

6. 已知方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+3x_2+5x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$与$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=-1\end{cases}$有解,且同解,求$a,b,c$的值.

分析: 分别记两个方程组为(I)和(II),同解,则基础解系相同,所含向量个数相同,即(I)和(II)的系数矩阵的秩相等,由(II)可知秩为2,故(I)的系数矩阵的秩为2,依此可求得a,进而可求得(I)的适当的一个或两个解,代入(II)中求b,c

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&3&5&1\\1&1&a&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-1&-1\\0&-1&a-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&a-2&0\end{array}\right),a=2,\text{求解: }X_1=(-1,1,0),X_2=(-2,0,1)$$

代入(II)中, $\begin{cases}-1+b=0\\-2+b^2=-1\end{cases}$, $\begin{cases}-2+c=0\\-4+(c+1)=-1\end{cases}$,得$b=1,c=2$.

6. 已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=-3 \end{cases}$有三个线性无关的解,求$a,b$的值及方程组的通解.

解: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & -3-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4a-8 \end{array}\right)$

三个线性无关的解,则$4-r(A)+1=2$,则$r(A)=2$,故$4-2a=0,4a+b-5=0,4a-8=0$,得

$a=2,,b=-3$.

此时,$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,特解$\gamma_0=(-4,5,0,0)$,

导出组的一组基础解系为$\eta_1=(-2,1,1,0),\eta_2=(4,-5,0,1)$,得通解$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$其中$k_1,k_2$任意.

三.证明题:

1. 证明秩$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\right) \Leftrightarrow \beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

证明: $\Rightarrow$若$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\right)=r$,不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$的一个线性无关的部分组,而$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\right)=r$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$的一个极大无关组,故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$都等价,从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$等价,特别的$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

$\Leftarrow$ 若β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$等价,从而秩相等.

2. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$个线性无关的$n$维向量,$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,且$k_i(i=1,2,,n)$全不为零.

证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中任意$n$个向量均线性无关.

证明: 首先$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关的.任取$n$个向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_{s+1}\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$,假设

$l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+l_n\alpha_n+l_{n+1}\alpha_{n+1}=0$,代入$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,得

$(l_1+l_{n+1}k_1)\alpha_1+\cdots+(l_{s-1}+l_{n+1}k_{s-1})\alpha_{s-1}+l_{n+1}k_s\alpha_s+(l_{s+1}+l_{n+1}k_{s+1})\alpha_{s+1}+\cdots+(l_n+l_{n+1}k_n)\alpha_n=0$

而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关,得系数全为零,首先$l_{n+1}k_s=0$,得$l_{n+1}=0$,代入求得

$l_1=\cdots=l_{s-1}=l_{s+1}=\cdots=l_n=0$,故$\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_{s+1}\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$线性无关.

3. 设两个线性方程组:(I) $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots a_{1n}y_n=b_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots a_{2n}y_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots a_{mn}y_n=b_m \end{cases}$, (II) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1 \end{cases}$,

求证：(I)有解当且仅当(II)无解.

证明: 设(I)的系数矩阵为A,列向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,常数项为$\beta$,

$\Rightarrow$若(I)有解,$r(A)=r(A,\beta)$,同时β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出,而在(II)中系数矩阵为$B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\\ \beta^T\end{pmatrix}$,

$\bar{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T & 0\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n^T & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1^T & 0\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,此时$r(\bar{B})=r(A)+1=r(A,\beta)+1=r(B)+1$,(II)无解.

$\Leftarrow$反之.若(II)无解则$r(\bar{B})=r(B)+1$,若(I)无解,则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+1$,即$B$的行秩为$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+1$,同时$r(\bar{B})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+1$,从而$r(\bar{B})=r(B)$,矛盾.

4. 设A是n阶方阵,已知齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$,若$\beta$不是方程组$AX=0$的解,试证明向量组$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性无关.

证明: 假设$k_0\beta+k_1(\alpha_1+\beta)+\cdots+k_t(\alpha_t+\beta)=0$,则$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t=0$,

若$k_0+k_1+\cdots+k_t\neq 0$,则β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$线性表出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是基础解系,故$\beta$是$AX=0$的一个解,矛盾,故$k_0+k_1+\cdots+k_t=0$,由$(k_0+k_1+\cdots+k_t)\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t=0$,则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0$,由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是基础解系,则$k_1=\cdots=k_t=0$,同时$k_0=0$,得$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性无关.

7. 设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关当且仅当任一由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出的向量的表示法是不唯一的.

证明: $\Rightarrow$取β是由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出的任一向量,设为$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$,由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,存在一组不全为零的数$l_1,l_2,\cdots,l_s$,使得$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s=0$,故

$\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_s+l_s)\alpha_s$,由于$l_1,l_2,\cdots,l_s$不全为零,得表示法不唯一.

$\Leftarrow$假若由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出的向量的表示法不唯一,设

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s$,其中存在$k_i\neq l_i$,则

$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_s-l_s)\alpha_s=0$,系数不全为零,故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

9. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,而向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,且$\beta\neq 0$,证明:向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中有且仅有一个向量$\alpha_j(1\le j\le m)$可由其前面的向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$线性表出.

证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 唯一线性表出.

由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,可知存在 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,使得 $k_0\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,取 k_j 为 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中最后一个非零的数,即 $k_j\neq 0,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_m=0$,则 α_j 可由向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表出.并且 α_j 由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表出的关系式中 β 的系数非零,若为零,则 α_j 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表出,与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,矛盾.从而 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1},\alpha_j$ 线性表出.

假设还有 α_i 可由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出.设 $i<j$,则 β 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i$ 线性表出.从而与 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出唯一矛盾.

11 设向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,且可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,证明存在向量 $\alpha_k(1\le k\le n)$,使得 $\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

证明:反证法: 若对任意向量 $\alpha_k(1\le k\le n)$,都有 $\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关,由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,从而 $\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,则 $\alpha_k(1\le k\le n)$ 可由 $\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出,从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出,特别的对 β_1,β_1 可由向量组 $\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出,与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关矛盾.