2017-2018 学年第一学期月考 3 线性方程组

一、填空题

1. 一个向量$\boldsymbol{\alpha}$线性无关的充要条件是____________.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{R}^3$中的 3 个列向量，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，且$\beta=2\alpha_1+2\alpha_2$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解是___________.

3. 线性方程组$AX=\beta$无解，且$r(A)=3$，则$r(A,\beta)=$_______.

4. n阶方阵A的行列式$|A|=0\Leftrightarrow A$的秩满足__________.

5. 非齐次线性方程组$AX=\beta$(A是$s\times n$矩阵)有唯一解的充要条件是__________.

6. $n+1$个n维向量组成的向量组是线性__________的向量组.

7. 齐次线性方程组有非零解的充要条件是_________________________.

8. 设向量组(I)是向量组(II)的部分组，则(I)线性_______，可得(II)线性______.

9. 方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$的基础解系含有 ________个向量.

二、试讨论a,b的取值，解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3, \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3. \end{cases}$

三、求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$,
$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表出.

四、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，设

$$\beta_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\beta_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\beta_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的线性相关性.

五、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，证明:

(1) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$k_1,k_2,\cdots,k_m$或者全为$0$，或者全不为$0$.

(2) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$和$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$都成立，其中$l_1\neq 0$，则

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$