2017-2018 学年第一学期月考 3 线性方程组

一、填空题

1. 一个向量$\boldsymbol{\alpha}$线性无关的充要条件是 $\alpha\neq 0$.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\mathbf{R}^3$中的 3 个列向量，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，且$\beta=2\alpha_1+2\alpha_2$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解是 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

3. 线性方程组$AX=\beta$无解，且$r(A)=3$，则$r(A,\beta)=$ 4 .

4. n阶方阵A的行列式$|A|=0\Leftrightarrow A$的秩满足 $r(A)<n$.

5. 非齐次线性方程组$AX=\beta$(A是$s\times n$矩阵)有唯一解的充要条件是 $r(A)=r(A,\beta)=n$.

6. $n+1$个n维向量组成的向量组是线性 相关 的向量组.

7. 齐次线性方程组有非零解的充要条件是 系数矩阵的秩小于未知量的个数 .

8. 设向量组(I)是向量组(II)的部分组，则(I)线性 相关 ，可得(II)线性 相关 .

定理8 9. 方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$的基础解系含有 3 个向量.

二、试讨论a,b的取值，解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3, \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3. \end{cases}$

三、求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$,
$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表出.

四、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，设

$$\beta_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\beta_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\beta_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的线性相关性.

五、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，证明:

(1) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$k_1,k_2,\cdots,k_m$或者全为$0$，或者全不为$0$.

(2) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$和$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$都成立，其中$l_1\neq 0$，则

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

二、试讨论 a,b 的取值，解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3, \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3. \end{cases}$

解 $\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -(b+2) & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$

① 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时，有唯一解；

$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解为 $x_1=1-\frac{1}{a}$，$x_2=\frac{1}{a}$，$x_3=0$.

② 当 $a=0$ 时，

$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 方程组无解.

③ 当 $a=b\neq 0$ 时，

$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

方程组有无穷多解，且一般解为

$\begin{cases} x_1=1-\frac{1}{a} \\ x_2=x_3+\frac{1}{a} \end{cases}$ 其中 x_3 为自由未知量

通解为 $k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k 为任意数.

三、求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表出.

解 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大无关组.

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

四、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，设

$$\beta_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\beta_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\beta_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\beta_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的线性相关性.

解 设$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0$，则

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+x_{m-1}(\alpha_{m-1}+\alpha_m)+x_m(\alpha_m+\alpha_1)=0$$

即 $(x_1+x_m)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+\cdots+(x_{m-1}+x_m)\alpha_m=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} x_1+x_m=0 \\ x_1+x_2=0 \\ \cdots \\ x_{m-1}+x_m=0 \end{cases} \quad (1)$$

系数行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{vmatrix}_m = 1+(-1)^{m-1} = \begin{cases} 0 & m\text{为偶数} \\ 2 & m\text{为奇数} \end{cases}$

当m为偶数时，(1)有非零解，因此$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关.

当m为奇数时，(1)只有零解，因此$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关.

五、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，证明:

(1) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则$k_1,k_2,\cdots,k_m$或者全为$0$，或者全不为$0$.

(2) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$和$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$都成立，其中$l_1\neq 0$，则

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}.$$

证 (1) 假设$k_1,k_2,\cdots,k_m$中有一个数为0，不妨设$k_1=0$

由任意$m-1$个向量都线性无关可知其余k_i均为0.

即$k_2=\cdots=k_m=0$.

因此，$k_1,k_2,\cdots,k_m$或者全为0，或者全不为0.

(2) 因为$l_1\neq 0$，由(1)可知$l_2\cdots l_m$全不为0.

若$k_1,k_2,\cdots,k_m$全为0，则$\frac{0}{l_1}=\frac{0}{l_2}=\cdots=\frac{0}{l_m}$成立.

若$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为0，由题意可知

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$
$$=-\frac{l_2}{l_1}\alpha_2-\cdots-\frac{l_m}{l_1}\alpha_m$$

因为α_1表示为$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合方法唯一，

所以，$\frac{k_2}{k_1}=\frac{l_2}{l_1},\cdots,\frac{k_m}{k_1}=\frac{l_m}{l_1}$. 因此$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}$.