2016-2017 学年第一学期月考 3 线性方程组

一、填空题：

1. 已知 $5(1,0,-1)-3\alpha-(1,0,2)=(2,-3,-1)$，则 $\alpha=$____________.

2. 若任一 3 维向量都可由 $\alpha_1=\left(1,0,1\right),\alpha_2=\left(1,-2,3\right),\alpha_3=\left(a,1,2\right)$ 线性表出，则 a 满足________.

3. 向量组 $\alpha_1=\left(1,0,1,2\right),\alpha_2=\left(1,1,3,1\right),\alpha_3=\left(2,-1,a+1,5\right)$ 线性相关，则 $a=$____.

4. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 的秩为 r，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 的秩为 $r+1$，则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 的秩为________.

5. 设非齐次线性方程组的系数矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，若常数项组成的列向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则此方程组的通解为_______________.

6. 设齐次线性方程组的系数矩阵是 n 阶方阵 A，若 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则此方程组的通解为______________________.

7. 设一线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda \end{pmatrix}$，则当 $\lambda=$_____时，方程组无解．当 $\lambda=$_____时，方程组有无穷多解．

8. 一个齐次线性方程组含有 n 个未知量，一组基础解系含 r 个解，则该方程组系数矩阵的秩为___________.

9. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，以 A 为系数矩阵的非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件是______________________.

二、求向量组 $\alpha_1=(1,0,-1,0),\alpha_2=(-1,2,0,1),\alpha_3=(-1,4,-1,2),\ \alpha_4=(0,0,7,7)$，$\alpha_5=(0,1,1,2)$ 的秩和一个极大线性无关组．

三、问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda, \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解？没有解？有无穷多解？有解时求解.

四、求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ 的一组基础解系.

五、设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F^m$ 是 n 个列向量，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，又 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$，证明：

(1) 此方程组必有无穷多个解；

(2) 记 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为此方程组的任一解，则必有 $x_n = 1$.