2016-2017 学年第一学期月考 3 线性方程组

一、填空题： $3\alpha = 5(1,0,-1)-(1,0,2)-(2,-3,-1)$

1. 已知 $5(1,0,-1)-3\alpha-(1,0,2)=(2,-3,-1)$，则 $\alpha=$ $\underline{(\frac{2}{3},1,-2)}$.

习14 2. 若任一 3 维向量都可由 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,-2,3),\alpha_3=(a,1,2)$ 线性表出，则 a 满足 $\underline{a\neq 3}$.

$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7+(1+2a) = 2a-6 \neq 0$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a+1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & a-1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. 向量组 $\alpha_1=(1,0,1,2),\alpha_2=(1,1,3,1),\alpha_3=(2,-1,a+1,5)$ 线性相关，则 $a=$ $\underline{-1}$.

习16 4. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 的秩为 r，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 的秩为 $r+1$，则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 的秩为 $\underline{r+1}$.

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$　$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$　$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r},\gamma$

5. 设非齐次线性方程组的系数矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关， $r(A)=3$

$(-1,1,1,1)$ 是 $AX=0$ 的解　$(1,1,1,1)$ 是 $AX=\beta$ 的解

且 $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，若常数项组成的列向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则此方程组的通解为 $\underline{k(-1,1,1,1)+(1,1,1,1)}$，其中 k 为任意数

$(1,1,\ldots,1)$ 是 $AX=0$ 的解

$\begin{cases} a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 1+\cdots+a_{1n}\cdot 1=0 \\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 1+\cdots+a_{2n}\cdot 1=0 \\ \cdots \\ a_{s1}\cdot 1+a_{s2}\cdot 1+\cdots+a_{sn}\cdot 1=0 \end{cases}$

6. 设齐次线性方程组的系数矩阵是 n 阶方阵 A，若 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则此方程组的通解为 $\underline{k(1,1,\ldots,1)}$ 其中 k 为任意数.

7. 设一线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda \end{pmatrix}$，则当 $\lambda=$ $\underline{1}$ 时，方程组无解．当 $\lambda=$ $\underline{0}$ 时，方程组有无穷多解.

8. 一个齐次线性方程组含有 n 个未知量，一组基础解系含 r 个解，则该方程组系数矩阵的秩为 $\underline{n-r}$.

9. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，以 A 为系数矩阵的非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件是 $\underline{r(A)=r(\bar{A})<n}$.

二、求向量组 $\alpha_1=(1,0,-1,0),\alpha_2=(-1,2,0,1),\alpha_3=(-1,4,-1,2),\ \alpha_4=(0,0,7,7)$，$\alpha_5=(0,1,1,2)$ 的秩和一个极大线性无关组.

三、问λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda, \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$有唯一解？没有解？有无穷多解？有解时求解.

四、求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$的一组基础解系.

五、设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F^m$是$n$个列向量，其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$线性无关，又$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$，证明：

(1) 此方程组必有无穷多个解；

(2) 记$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$为此方程组的任一解，则必有$x_n = 1$.

二、求向量组 $\alpha_1=(1,0,-1,0), \alpha_2=(-1,2,0,1), \alpha_3=(-1,4,-1,2), \alpha_4=(0,0,7,7)$，

$\alpha_5=(0,1,1,2)$ 的秩和一个极大线性无关组.

解

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&2&4&0&1\\-1&0&-1&7&1\\0&1&2&7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&2&4&0&1\\0&-1&-2&7&1\\0&1&2&7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&7&2\\0&-1&-2&7&1\\0&2&4&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&7&2\\0&0&0&14&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

秩为3，且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大线性无关组.

三、问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3=1,\\-x_1+\lambda x_2-x_3=-\lambda,\\-x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有唯一解？没有解？有无穷多解？有解时求解.

解

$$d=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

① 当 $\lambda\neq2$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，有唯一解，解为 $x_1=\frac{\lambda-1}{\lambda-2}$，$x_2=\frac{1}{\lambda-2}$，$x_3=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$

② 当 $\lambda=2$ 时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&-3&-3&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

$r(A)=1<2=r(\bar{A})$ 无解

③ 当 $\lambda=-1$ 时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

有无穷多解，一般解为 $x_1=-1-x_2-x_3$，其中 x_2, x_3 为自由未知量

通解为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1, k_2 为任意数

法二

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\-1&-1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-\lambda&-\lambda^2\\1&-\lambda&1&\lambda\\\lambda&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-\lambda&-\lambda^2\\0&-\lambda-1&\lambda+1&\lambda^2+\lambda\\0&-\lambda-1&\lambda^2-1&\lambda^3+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-\lambda&-\lambda^2\\0&-\lambda-1&-\lambda-1&\lambda^2+\lambda\\0&0&(\lambda+1)(\lambda-2)&(\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

……

四、求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=0,\\2x_1+6x_2+x_3-3x_4=0,\\x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=0,\\3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=0\end{cases}$ 的一组基础解系.

解

$$\begin{pmatrix}1&3&3&-2&1\\2&6&1&-3&0\\1&3&-2&-1&-1\\3&9&4&-5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&-2&1\\0&0&-5&1&-2\\0&0&-5&1&-2\\0&0&-5&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&-2&1\\0&0&5&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&-\frac{7}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&1&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1+3x_2-\frac{7}{5}x_4-\frac{1}{5}x_5=0\\x_3-\frac{1}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_1=-3x_2+\frac{7}{5}x_4+\frac{1}{5}x_5\\x_3=\frac{1}{5}x_4-\frac{2}{5}x_5\end{cases}$ 其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量

基础解系为 $\eta_1=(-3,1,0,0,0)$

$\eta_2=(\frac{7}{5},0,\frac{1}{5},1,0)$

$\eta_3=(\frac{1}{5},0,-\frac{2}{5},0,1)$

五、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in F^m$是$n$个列向量，其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$，证明：

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$

(1) 此方程组必有无穷多个解； $r(A)=r(A,\beta)<n$

(2) 记$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为此方程组的任一解，则必有$x_n=1$.

证 (1) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关.

又因为 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

所以 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大无关组

且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n-1<n$

因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$,

所以 $(1,1,\cdots,1)^T$ 是线性方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 的一个解.

因此 该方程组必有无穷多解.

(2) 因为

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

所以

$(x_1-1)\alpha_1+(x_2-1)\alpha_2+\cdots+(x_n-1)\alpha_n=0$

即 $\gamma=(x_1-1,x_2-1,\cdots,x_n-1)$ 是

向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 的一个解.

若 $\gamma=0$，则 $x_n=1$.

若 $\gamma\neq0$，下证 $x_n=1$.

(反证) 假设 $x_n\neq1$，则

α_n 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示，

于是 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，

所以 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})<n-1$.

因此 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<n-1$

与 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关矛盾.

因此，$x_n=1$.