# 第二章 行列式 练习题

一. 填空

1. 523194687 的逆序数是__________,它是__________排列.

2. 若$126i48k97$为奇排列,则$i=$______,$k=$_______.

3. $\tau(246\cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots31)=$____________, $\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=$__________.

4. 若排列$j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$与排列$j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$有相同的奇偶性,则$n=$_________.

5. 设$4k+1$级排列$j_1j_2\cdots j_{4k+1}$是奇排列,则$j_{4k+1}\cdots j_2j_1$是________排列,添上数码$4k+2$后构成的 $4k+2$级排列$(4k+2)j_{4k+1}\cdots j_2j_1$是_______排列.

6. 如果排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数是$k$,排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数是__________.

7. $|A|=|a_{ij}|$为 4 级行列式,项$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$的符号是_________,$a_{13}a_{41}a_{34}a_{22}$的符号是__________.

8. 写出四级行列式中带负号且含有因子$a_{23}a_{31}$的项____________________________.

9. $n$阶行列式$D$等于零的充要条件是$D$的某两行(或两列)的元素成比例或者$D$中一定有一行(或列)的元素全为零.此命题是否正确__________.

10. 设$n$阶行列式$D$的值为$c$,若将$D$的所有元素都乘上$-1$,得到的行列式的值为_________.

11. 设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$,$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=2$,则$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix}=$_______.

12. 已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=4$, 那么$\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}=$________________.

13. 已知$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=2$,则$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=$\_\_\_\_\_\_\_\_,$\begin{vmatrix} x_1 & 2x_2 & x_3 \\ 3y_1 & 6y_2 & 3y_3 \\ -z_1 & -2z_2 & -z_3 \end{vmatrix}=$________.

14. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$,$A_{ij}$为$(i,j)$元素的代数余子式,则$-2A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=$_______.

15. 设$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,$A_{ij}$为$(i,j)$元素的代数余子式,求$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=$_________.

16. 在行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix}$中,$b$的代数余子式为$-24$,则$a=$________.

17．已知$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & -1 & 4 \end{vmatrix}$中代数余子式$A_{13}=7$,则代数余子式$A_{31}=$________．

18. 四阶行列式的第三行的元素为$-1,0,2,4$,第四行元素的代数余子式分别是$2,10,a,4$,则$a=$_______.

19. 四阶行列式的第三行的元素为$-1,2,-2,4$,其对应的余子式分别为$-5,3,-2,0$,则行列式等于_______.

20. 设$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$,则展开式中$x^3$的系数为________.

21．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ \lambda x_1+x_2=0 \\ x_1+\lambda x_2=0 \end{cases}$有非零解的充要条件是_______.

22. 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$有非零解,则$a=$_______.

23. 若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=1$,则线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1-a_{12}x_2+b_1=0 \\ a_{21}x_1-a_{22}x_2+b_2=0 \end{cases}$的解为__________________.

24. 若$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3-x^2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 2 & x^2+3 \end{vmatrix}=0$,则$x=$_________; 若$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$,则$x=$_________.

25. 若$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0$,则$x=$_________________________.

二 计算题

1. 计算行列式

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$,　　2) $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$,　　3), $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$

4) $\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}_n$, 6) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ax^{n-2} & ax^{n-3} & ax^{n-4} & \cdots & a & -1 \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$, 8) $\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$,

9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$,10) $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \cdots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \cdots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \cdots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \cdots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$,

11) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$.

2. 求行列式$D=\left|a_{ij}\right|_n$,其中(1) $a_{ij}=i+j$. (2) $a_{ij}=ij$.

3. 问$\lambda,\mu$取何值时,齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\mu x_2+x_3=0 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解.

4. 用克拉默法则解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$.

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为数域 $P$ 中两两不等的数,求线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1 \\ \cdots \\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1 \end{cases}$ 的解.

三 证明题

1．设 $n\geq 2$，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}\quad(x\neq 0)$.

2. 证明 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.