2016-2017 学年第一学期月考 2 行列式

一、填空题：

$126\,3\,48\,5\,97$

$63,64,65$

$85,87$

97

1. 若$126i48k97$为奇排列，则$i=$ <u>5</u> ,$k=$ <u>3</u> .

2. 如果排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数是k，则排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数是 $\binom{n}{2}-k$.

3. 设n阶行列式D的值为c，若D的所有元素都乘上-1，所得行列式的值为 $(-1)^n c$.

4. 若$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=$ <u>2</u> ，$\begin{vmatrix} x_1 & 2x_2 & x_3 \\ 3y_1 & 6y_2 & 3y_3 \\ -z_1 & -2z_2 & -z_3 \end{vmatrix}=$ <u>$3\cdot(-1)\cdot 2\cdot 2=-12$</u> .

5. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$，则$-2A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=$ $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0$.

6. 四阶行列式的第三行的元素为$-1,2,-2,4$，其对应的余子式分别为$-5,3,-2,0$，则行列式等于 $(-1)\cdot(-5)-2\cdot 3+(-2)\cdot(-2)-4\cdot 0=5-6+4=3$.

7. 四阶行列式的第三行的元素为$-1,0,2,4$，第四行元素的代数余子式分别是$2,10,a,4$，则$a=$ <u>-7</u> .

$(-1)\cdot 2+0\cdot 10+2\cdot a+4\cdot 4=0$

$2a+14=0$

8. 若$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0$，则$x=$ <u>$0,1,\ldots,n-2$</u> .

二、计算n级行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

16

二、计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

法一

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\mathrm{inv}(n\cdots 21)}(1-n)^{n-1}.$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-n)^{n-1}$$

法二

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\mathrm{inv}(n\cdots 21)}(1-n)^{n-1}.$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-n)^{n-1}$$

法三

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{1-n} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-n)^{n-1}.$$

16

三、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & a+x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\left(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

四、问 λ,μ 取何值时？齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

解

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 2\mu-1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \mu-1 & 1 \\ 2\mu-1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(-\mu)=0$$

当 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$ 时，这个方程组有非零解.

五、证明 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

证 对 n 用数学归纳法.

$n=1$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$.

假设等式对 $n-1$ 成立. 由 Laplace 定理，有

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} D_{2n-2}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)\prod_{i=1}^{n-1}(a_id_i-b_ic_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$