第一章 多项式 练习题

一. 填空

1. 数集$\{0\}$对四则运算中的哪几个是封闭的_________.

2. 多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$, $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_j x^j$,则 $f(x)g(x)$ 的 k 次项的系数为_____________.

3. $g(x)=x^2-x+2$ 除 $f(x)=x^4-2x+5$ 所得商式 $q(x)=$_______ ,余式 $r(x)=$_________ .

4. $x-3$ 除 $2x^4-x^2-9x$ 的余式为_____________________.

5. 取多项式 $f(x)$,用 $x-1$ 除余式为 3 ,用 $x-3$ 除余式为 5 ,则用 $(x-1)(x-3)$ 除余式为__________.

6. $f(x),g(x)$ 是非零多项式, $d_1(x),d_2(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的两个最大公因式, 则 $d_1(x),d_2(x)$ 的关系为_____.

7. 两个多项式互相整除的充要条件是_________________________.

8. 已知 $(x+1)^2|ax^4+bx^2-1$,则 $a=$_____, $b=$______ .

9. 设 $g(x)=x^2-x-2$ 除 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 的余式为 $2x+1$,则 $a=$_______, $b=$______.

10. 多项式 $f(x)$ 有重因式的充要条件是_____________________.

11. 多项式函数 $f(x)=x^3-\frac{11}{2}x^2+\frac{17}{2}x-3$ 的有理根为____________________.

12. 以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根的首一不可约有理系数多项式为__________________________.

13. 把有理系数多项式 $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x+3$ 写成一个有理数与一个本原多项式的乘积_______________.

14. 多项式 $f(x)=\left[(4x-3)^{2018}x^2-3x+1\right]^{2018}(7x^3-10x+2)^{2017}$ 的各项系数之和为_____,常数项为___.

二. 计算题

1. 设 $f(x)=x^4+2x^3-4x-4, g(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2.$

 (1) 求 $(f(x),g(x))$, (2) 求 $u(x),v(x)$,使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

2. 设 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1.$

 (1) 求 $(f(x),g(x))$, (2) 求 $u(x),v(x)$,使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

3. $f(x)=x^3+tx^2+x+u$ 和 $g(x)=x^3+(1+t)x^2+1$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

4. 设 $f_1(x),f_2(x)$ 是首1的次数 ≤ 3 的互异多项式,设 $x^4+x^2+1\mid f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$,求 $(f(x),g(x))$.

5. m,p,q 适合什么条件时,有 $(x^2+mx+1)\big|x^4+px+q$.

6. 如果 $f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b$ 能被 x^2-1 整除,求 a,b .

7. 如果 $f'(x)\mid f(x)$,求多项式 $f(x)$.

8. 判断多项式 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2$ 有无重因式.

9. 分别在有理数域、实数域和复数域上把 x^4+1 写成不可约多项式的乘积.

10. 求满足下列三个条件的一个二次多项式 $f(x)$:

(a). $x+2$ 整除 $f(x)$, (b). $x-3$ 除 $f(x)$ 的余式为 10, (c). $x+1$ 除 $f(x)$ 的余式等于 $x-1$ 除 $f(x)$ 的余式.

11. 求一个三次多项式 $f(x)$,使得 $f(x)+1$ 可被 $(x-1)^2$ 整除, $f(x)-1$ 可被 $(x+1)^2$ 整除.

12. 设 $f(x)=x^2-4x+a$,若存在唯一的 3 次首一多项式 $g(x)$,使得 $f(x)\mid g(x), g(x)\mid f^2(x)$,求 a 与 $g(x)$.

三. 证明题

1. 若 P 为一数域,且 $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in P$,证明 $\sqrt{2}\in P,\sqrt{6}\in P$;问 $\sqrt{7}$ 是否属于 P ?

2. 证明: 设 $f(x)$ 是数域 P 上的次数大于 0 的多项式, 证明 $f(x)$ 是不可约多项式的充要条件是对任意的常数 $a\in P$, $f(x+a)$ 是不可约的.

3. 证明 $x\mid f^k(x)$ 当且仅当 $x\mid f(x)$.

4. 设 $f(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，证明 $f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上无重根.

5. 任取多项式 $f(x),g(x)\in P[x]$,证明 $(f(x),g(x))=(f(x)+g(x),g(x))$

6. 证明: 若 $p(x)$ 不可约, $p(x)\mid f(x)g(x)$,且 $p(x)\mid[f(x)+g(x)]$,则 $p(x)\mid f(x)$ 且 $p(x)\mid g(x)$.

若 $p(x)$ 可约,上述结论是否成立?为什么?

7. 设 f,g 非零,若任给 $h(x)$,由 $f(x)\mid g(x)h(x)$,都可得 $f(x)\mid h(x)$,证明 $(f,g)=1$.

8. 设 f,g 非零,若任给 $h(x)$,由 $f(x)\mid h(x)$, $g(x)\mid h(x)$,都可得 $f(x)g(x)\mid h(x)$,证明 $(f,g)=1$.

9. 设一元多项式 $f(x),g(x),h(x)$,其中 $(f(x),h(x))=1$,且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 被 $h(x)$ 除所得余式相等,

证明: $(f(x)g(x),h(x))=1$.

10. 证明: $\sin x$ 不是多项式.

11. $f(x),g(x)$ 是非零多项式, 证明存在自然数 N, 当 $n_1,n_2>N$ 时有 $(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x))$.

12. 设 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,证明存在 $p(x)\in F[x]$ 使得 $f(x)\mid p(x)$,且 $g(x)\mid(p(x)+h(x))$ 当且仅当 $(f(x),g(x))\mid h(x)$.

13. 证明: 任给非负整数 n,都有 $x^2+x+1\mid(x^{n+2}+(x+1)^{2n+1})$.

14. 证明: $x^d-1\mid x^n-1 \Leftrightarrow d\mid n$,其中 d,n 是正整数.

15. 证明: $(x^n-1,x^m-1)=x^{(n,m)}-1$.