第一章练习题-答案(部分)

二. 计算题

4. 解 已知$(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$.有6个根,故$x^4+x^2+1$的4个根$\omega_1,\omega_2,\xi_1,\xi_2$

满足$\omega_1^3=\omega_2^3=1,\xi_1^3=\xi_2^3=-1$,而$x^4+x^2+1\mid f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$,则$\omega_1,\omega_2,\xi_1,\xi_2$也是$f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$的根,代入有

$\begin{cases} f_1(\omega_1^3)+\omega_1 f_2(\omega_1^3)=0 \\ f_1(\omega_2^3)+\omega_2 f_2(\omega_2^3)=0 \end{cases}$,即$\begin{cases} f_1(1)+\omega_1 f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\omega_2 f_2(1)=0 \end{cases}$,求解得$\begin{cases} f_1(1)=0 \\ f_2(1)=0 \end{cases}$,即$x-1\mid f_1(x),f_2(x)$.

$\begin{cases} f_1(\xi_1^3)-\xi_1 f_2(\xi_1^3)=0 \\ f_1(\xi_2^3)-\xi_2 f_2(\xi_2^3)=0 \end{cases}$,即$\begin{cases} f_1(-1)-\xi_1 f_2(-1)=0 \\ f_1(-1)-\xi_2 f_2(-1)=0 \end{cases}$,求解得$\begin{cases} f_1(-1)=0 \\ f_2(-1)=0 \end{cases}$,即$x+1\mid f_1(x),f_2(x)$.

由于$(x-1,x+1)=1$,则$(x-1)(x+1)\mid f_1(x),f_2(x)$,由于$f_1(x),f_2(x)$是首项系数为1的次数$\le 3$的互异多项式,故$(x-1)(x+1)$是最大公因式.

12. 解 由题意,$f'(x)$可被$x-1$与$x+1$整除,而$f(x)$三次,故可设$f'(x)=a(x-1)(x+1)=ax^2-a$,积分可得$f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax+b$,代入$f(1)=\frac{a}{3}-a+b=-1$, $f(-1)=-\frac{a}{3}+a+b=1$, 求解得: $a=\frac{3}{2},b=0$,故$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$.

三. 证明题

2. 证明: 设$f(x)$是数域P上的次数大于0的多项式, 证明$f(x)$是不可约多项式的充要条件是对任意的常

  数$a\in P$, $f(x+a)$是不可约的.

证明 反证法 $\Rightarrow$假若$f(x+a)$可约,设$f(x+a)=f_1(x)f_2(x)$,其中$1<\partial f_1(x),\partial f_2(x)<n$,则

$$f(x)=f_1(x-a)f_2(x-a)=g(x)h(x),$$

即$f(x)$可约,矛盾,故$f(x+a)$是不可约.

$\Leftarrow$若$f(x)$可约,设$f(x)=g(x)h(x)$,则$f(x+a)=g(x+a)h(x+a)=f_1(x)f_2(x)$可约,矛盾.

3. 证明$x\mid f^k(x)$当且仅当$x\mid f(x)$.

证明 若$x\mid f(x)$,则$x\mid f^k(x)$自然成立.反之,若$x\mid f^k(x)$,由于x不可约,则$x\mid f(x)$.

5. 证明 $p(x)$不可约,且$p(x)\mid f(x)g(x)$,则$p(x)\mid f(x)$或$p(x)\mid g(x)$;

若$p(x)\mid f(x)$,再由于$p(x)\mid[f(x)+g(x)]$,则$p(x)\mid g(x)$;

若 $p(x)\mid g(x)$,再由于 $p(x)\mid[f(x)+g(x)]$,则 $p(x)\mid f(x)$.故都有 $p(x)\mid f(x)$ 且 $p(x)\mid g(x)$.

若 $p(x)$ 可约, 结论不一定成立,例子 $x^2\mid x(x^2-x), x^2\mid[x+x^2-x]$,但 $x^2\nmid x$.

6. 反证,若 $(f,g)=d(x)\neq 1$,设 $f=df_1, g=dg_1$,取 $h=f_1g$,则 $h=gf_1=dg_1f_1=fg_1$,故 $f\mid gh$,由题意可得 $f\mid h$,即 $f\mid f_1$,矛盾.

9. 证明: $\sin x$ 不是多项式.

若 $\sin x$ 可写成多项式的形式 $\sin x=f(x)$,不妨设 $f(x)$ 是 n 次多项式,考察两边的根的个数.一个无限多个,一个有限个.

10. $f(x),g(x)$ 是非零多项式, 证明存在自然数 N, 当 $n_1,n_2>N$ 时有 $(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x))$.

若 $(f(x),g(x))=1$, 则 $(f^n(x),g(x))=1$, 成立. 下设 $f(x),g(x)$ 不互素, 设

$$(f(x),g(x))=d(x)=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

为标准分解式,同时设 $g(x)=p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x)g_1(x)$,其中 $p_i(x)\nmid g_1(x)$, $t_i\geq r_i, i=1,\cdots,s$.

取 $N=\max(t_1,t_2,\cdots,t_s)$, 则 $(f^N(x),g(x))=d(x)=p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x)$,从而任给 $n_1,n_2>N$, 都有

$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x))=p_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x).$$

11. 证明 $\Rightarrow$ 设 $(f,g)=d(x)$,则 $d\mid f, d\mid g$,从而 $d(x)\mid p(x)$,且 $d(x)\mid(p(x)+h(x))$,则 $d(x)\mid h(x)$.

$\Leftarrow$ $(f,g)\mid h$,则存在 $k(x)$,使得 $h=(f,g)k$,而对 (f,g),存在多项式 $u(x),v(x)$,使得 $uf+vg=(f,g)$,代入 $h=ufk+vgk$,即 $h-ufk=vgk$,令 $-ufk=p$,则 $f\mid p$,且 $g\mid(p+h)$.

12. 证明 已知 $(x^2+x+1)(x-1)=x^3-1$.从而 x^2+x+1 的根是 $x^3=1$ 的两个共轭复根,记为 $\alpha,\overline{\alpha}$.若能证明 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 以 $\alpha,\overline{\alpha}$ 为根,则可知 x^2+x+1 是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 的一个因式.

$$\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}=\alpha^2\alpha^n+(\alpha+1)^{2n+1}=-(\alpha+1)\alpha^n+(\alpha+1)^{2n+1}=(\alpha+1)(-\alpha^n+(\alpha+1)^{2n})$$

$$=(\alpha+1)(-\alpha^n+(\alpha^2+2\alpha+1)^n)=(\alpha+1)(-\alpha^n+\alpha^n)=0.$$

补充

1. 证明: $x^d-1\mid x^n-1\Leftrightarrow d\mid n$,其中 d,n 是正整数.

证明: $\Leftarrow$若 $d\mid n$,设 $n=ds$,从而

$$x^n-1=x^{ds}-1=(x^d)^s-1=(x^d-1)(x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\cdots+x^d+1).$$

则 $x^d-1\mid x^n-1$.

$\Rightarrow$ 设 $n=ds+r$,其中 $0\le r<d$, $x^n-1=x^{ds+r}-1=x^{ds}x^r-x^r+x^r-1=x^r(x^{ds}-1)+x^r-1$.而

$x^d-1\mid x^{ds}-1$, $x^d-1\mid x^n-1$,故 $x^d-1\mid(x^r-1)$,从而 $x^r-1=0$,即 $r=0$,即 $d\mid n$.

2. 证明 $(x^n-1,x^m-1)=x^{(n,m)}-1$.

证明: 设 $(m,n)=d$.则存在 s,t ,使得 $m=ds,n=dt$,且 $(s,t)=1$.

$x^m-1=x^{ds}-1=(x^d-1)(x^{d(s-1)}+x^{d(s-2)}+\Lambda+x^d+1)$, $x^d-1\mid x^m-1$,

$x^n-1=x^{dt}-1=(x^d-1)(x^{d(t-1)}+x^{d(t-2)}+\Lambda+x^d+1)$, $x^d-1\mid x^n-1$.

由 $(m,n)=d$,存在 u,v 使得 $um+vn=d$, u,v 不能全大于零,不能全小于零,故设 $u>0,v<0$,则

$x^{-vn}(x^d-1)=x^{d-vn}-x^{-vn}=x^{um}-x^{-vn}=(x^{um}-1)-(x^{-vn}-1)$

若 $\varphi(x)\mid x^m-1,\varphi(x)\mid x^n-1$,则 $\varphi(x)\mid x^{-vn}(x^d-1)$,而 $(\varphi(x),x^{-vn})=1$,故 $\varphi(x)\mid(x^d-1)$.