月考（多项式）

班级________姓名__________学号____________

一、填空题

1. $x-3$ 除 $2x^4-13x^2-9x$ 的商式为 $\underline{2x^3+6x^2+5x+6}$.

2. 若 $(x-1)^2|ax^4-bx^3+1$,则 $\underline{a=3,b=4}$.

3. 能被任一多项式整除的多项式是_零多项式_,能整除任一多项式的多项式是__零次多项式_.

4. 把有理系数多项式 $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x+3$ 写成一个有理数与一个本原多项式的乘积 $\underline{\frac{1}{6}(6x^3+3x^2-10x+18)}$.

5. 多项式 $f(x)=x^5-5x^4+8x^3-8x^2+7x-3$ 的有理根集合为 $\underline{\{1,3\}}$.

二、判断题(判断对错)

1. 若 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$,则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式.（ 否 ）

2. 有理系数多项式 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上没有有理根,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.（ 否 ）

3. 若 $p(x)\,|\,f(x)g(x)$ 且 $p(x)\,|\,(f(x)+g(x))$,其中 $p(x)$ 在数域 F 上不可约,则 $p(x)\,|\,f(x)$ 且 $p(x)\,|\,g(x)$.（ 正确 ）

三、设 $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-1$, $g(x)=x^3-2x+1$,

(1) 求 $(f(x),g(x))$；

(2) 求 $u(x),v(x)$,使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解 $f=g(x-1)+x^2-x$, $g=r_1(x+1)+(-x+1)$, $r_1=r_2(-x)$,则

$(f(x),g(x))=x-1$,而 $r_2=-q_2f+(1+q_1q_2)g$,代入可得

$(f(x),g(x))=-r_2=q_2f-(1+q_1q_2)g$, $u(x)=x+1, v(x)=-x^2$

四、设 $f(x)=a(x-2)^2+b(x+1)^2+cx^2$, $g(x)=x-4$,若 $f(x)=g(x)$,求 a,b,c 的值.　　$a=-\frac{3}{4}, b=-1, c=\frac{7}{4}$

五、已知多项式 $f(x)=x^3+tx^2+x+u$ 和多项式 $g(x)=x^3+(1+t)x^2+1$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

解: $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$,其中 $q_1(x)=1, r_1(x)=-x^2+x+u-1$.

$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$,其中 $q_2(x)=-x-2-t$,

$r_2(x)=(u+1+t)x+1+(2+t)(u-1)$,最大公因式是二次多项式,则

$r_2(x)=(u+1+t)x+1+(2+t)(u-1)=0$,从而 $\begin{cases} u+1+t=0 \\ 1+(2+t)(u-1)=0 \end{cases}$ 解得:

$\begin{cases} t=-1 \\ u=0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} t=-3 \\ u=2 \end{cases}$.

六、证明: $(f(x),h(x))=1,(g(x),h(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)g(x),h(x))=1$.

证明 由 $(f,h)=1,(g,h)=1$ 可知,存在多项式 u_1,v_1,u_2,v_2 使得

$u_1f+v_1h=1, u_2g+v_2h=1$,两式左右两边分别相乘得

$u_1u_2fg+[u_1v_2f+u_2v_1g+v_1v_2h]h=1$.从而得 $(f(x)g(x),h(x))=1$.

反之,若 $(fg,h)=1$,在在 u,v,使得 $ufg+vh=1$,故 $(f,h)=1,(g,h)=1$.