组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Catalan 数

Outline

定义 1.1 (Dyck 路)

从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的格路, 只允许 $\uparrow$ 和 $\rightarrow$ 的步出现, 且不能在直线 $y=x$ 的下方.

定义 1.1 (Dyck 路)

从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的格路, 只允许 $\uparrow$ 和 $\rightarrow$ 的步出现, 且不能在直线 $y=x$ 的下方.

图: Dyck 路 $(n=3)$

我们用 $\mathcal{D}(n)$ 表示长度为 $2n$ 的 Dyck 路的集合，且定义 *Catalan* 数如下

$$C_n = \#\mathcal{D}(n).$$

我们知道, n-Dyck 路的总数是第 n 项 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

定义 1.1 (Dyck 路)

从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的格路, 只允许 $\uparrow$ 和 $\rightarrow$ 的步出现, 且不能在直线 $y=x$ 的下方.

图: Dyck 路 $(n=3)$

我们用 $\mathcal{D}(n)$ 表示长度为 $2n$ 的 Dyck 路的集合，且定义 *Catalan* 数如下

$$C_n = \#\mathcal{D}(n).$$

我们知道, n-Dyck 路的总数是第 n 项 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

经过计数, 可得 $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42.$

Outline

递推关系的建立

以半 n 长 Dyck 路为例. 设满足条件的 Dyck 路的条数即 Catalan 数为 C_n. 设满足条件的一条 Dyck 路:

$$P = v_0 v_1 \cdots v_{2n},$$

其中 $v_0 = (0,0)$, $v_{2n} = (n,n)$.

设从前往后第一个与 $y = x$ 相交的顶点为 $v_{2i} = (i,i)$. 将 Dyck 路 P 按照 v_{2i} 分成两段,

1. $v_0 = (0,0) \to v_{2i} = (i,i)$. 此时第一步一定向上, 最后一步一定向右, 故只需考虑 $(0,1) \to (i-1,i)$ 的格路条数, 计数为 C_{i-1}.
2. $v_{2i} = (i,i) \to v_{2n} = (n,n)$. 计数为 C_{n-i}.

于是有

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}. \tag{1}$$

设 C_n 为 Catalan 数, 规定 $C_0 = 1$. 令

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

对 (1) 式两边同乘以 x^n 并关于 $n \geq 0$ 求和得

$$A(x) - 1 = xA(x)^2,$$

解得

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

利用二项式定理

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{(舍去正号，为什么？)} \\
&= \frac{1}{2x}\left(1-\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1}x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n. \quad \text{(计算过程请自行补充完整)}
\end{aligned}
$$

提取 x^n 项系数, 得

$$
C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
$$

Outline

建立 $n+1$ 个 x 组成的括号字符串

一个 $n+1$ 个 x 组成的括号字符串由插入 n 个左括号和 n 个右括号组成.

$n=3$ 时,

$$x(x(xx)) \quad x((xx)x) \quad (xx)(xx) \quad (x(xx))x \quad ((xx)x)x$$

注

对于 (((xx)x)((xx)(xx))) 这种形式的元素, 我们通常忽略最左和最右的括号.

$2n$ 长 Ballot 序列

设 $w = w_1 \cdots w_{2n}$ 是由 n 个 1 和 n 个 2 组成的序列, 对任意 $i = 1, 2, \cdots, 2n$, 要求前 i 个字 $w_1 \cdots w_i$ 中 1 的个数大于或等于 2 的个数. 满足上述条件的序列称为 $2n$ 长 Ballot 序列.

如 $n = 3$ 时, Ballot 序列如下

$$111222 \quad 112122 \quad 112212 \quad 121212 \quad 121122$$

n 对圆括号合法排列

n 对圆括号排在一起，从左往右看，左括号的个数大于等于右括号的个数，则称为合法.

$n = 3$ 时，

$$((()))\quad (()())\quad (())()\quad ()()()\quad ()(())$$

注

Catalan 数任意两个组合解释之间都可建立双射. 这里 Ballot 序列与 n 对圆括号合法排列之间的双射，只需将 “1” 与 “(” , “2” 与 “)” 对应起来即可.

凸 $n+2$ 边形切割

- 将 $n+2$ 边形添加对角线, 使其被切割为 n 个三角形.

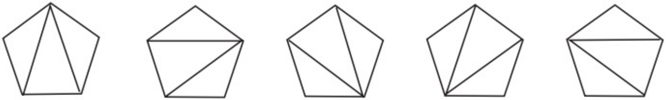


图: 凸 $n+2$ 边形切割 $(n=3)$

n 个顶点的二叉树

- 树：连通且无圈.
- 二叉树：顶点度小于等于 2 的树.

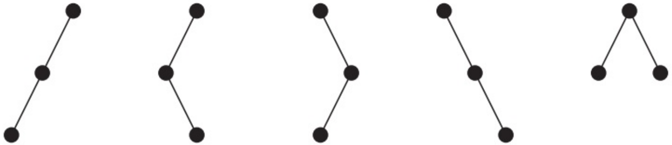


图: n 个顶点的二叉树 $(n = 3)$

$n+1$ 个 x 组成的括号字符串与 n-二叉树间的双射

- 设 $n+1$ 个 x 组成的括号字符串为 w, 定义二叉树 B_w 的递推关系满足: 如果 $n=0$, 则 $B_w=\emptyset$; 否则, 从 w 最外层括号开始, 如果 $w=st$, 则 B_w 有一个根顶点 v、左子树 B_s 及右子树 B_t. 例如, 如果 $w=xx$, 则 B_w 只包含一个顶点（根）. 对下图中的二叉树, 其对应的括号为

$$((xx)x)x \quad (x(xx))x \quad x((xx)x) \quad x(x(xx)) \quad (xx)(xx)$$

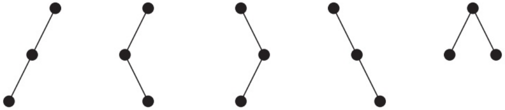
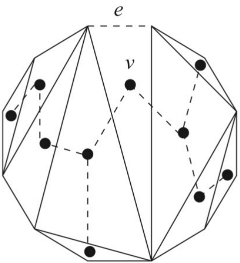


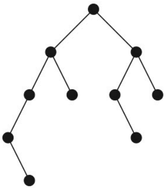
图: n 个顶点的二叉树 (n=3)

建立 n-二叉树与凸 $n+2$ 边形切割间双射

- 固定多边形的边 e, 在 T 的每个三角形内部放置一个顶点, 让根顶点对应于以 e 为边的三角形. 连接相邻三角形中的点, 如图 (a). 从顶点 v 出发, 确定边 f_1 及 f_2, 沿着边 f_1 逆时针旋转定义第一条边为左侧边 f_{11}, 第二条边为右侧边 f_{12}. 以此类推, 即可得到二叉树如 (b).



(a)


(b)