组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

Fibonacci 数列，是由 13 世纪的意大利数学家 Fibonacci 提出的，当时是和兔子的繁殖问题有关的。这个问题是：

例 0.1

假定一对刚出生的小兔一个月后就能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，并且此后每个月都生一对小兔．假定每产一对小兔必为一雌一雄，且不考虑死亡问题，则一对刚出生的兔子，一年内能繁殖成多少对兔子？

Fibonacci 数列，是由 13 世纪的意大利数学家 Fibonacci 提出的，当时是和兔子的繁殖问题有关的。这个问题是：

例 0.1

假定一对刚出生的小兔一个月后就能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，并且此后每个月都生一对小兔．假定每产一对小兔必为一雌一雄，且不考虑死亡问题，则一对刚出生的兔子，一年内能繁殖成多少对兔子？

我们用 $f(n)$ 表示第 n 个月兔子对数，则

月份	1	2	3	4	5	6	7
大兔子	1	1	2	3	5	8	13
小兔子	0	1	1	2	3	5	8

于是

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	2	3	5	8	13	21

注意到

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

其中 $f(n-1)$ 表示大兔子的对数，$f(n-2)$ 表示小兔子的对数。

例 0.2

用多米诺骨牌（2×1 长方块）完全覆盖 $n \times 2$ 棋盘的覆盖方案数。

例 0.2

用多米诺骨牌（2×1 长方块）完全覆盖 $n \times 2$ 棋盘的覆盖方案数。

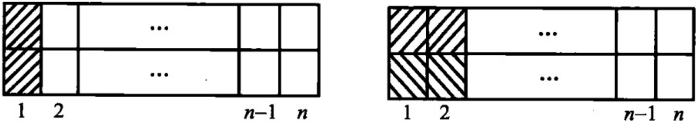

图: $n \times 2$ 棋盘覆盖方案

- 若第一张骨牌覆盖第一列两个方格，则剩下的是 $(n-1) \times 2$ 棋盘的覆盖问题；
- 若第一张骨牌覆盖第一行两个方格，则还需一张骨牌覆盖第二行两个方格，剩下的是 $(n-2) \times 2$ 棋盘的覆盖问题。

用 $f(n)$ 表示 $n \times 2$ 棋盘的覆盖问题，则有

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

例 0.3

一个小孩上楼梯，每次可上一阶或二阶，问上 n 阶楼梯有多少种方案?

例 0.3

一个小孩上楼梯，每次可上一阶或二阶，问上 n 阶楼梯有多少种方案?

n	方法数	方案				
1	1	1				
2	2	1+1	2			
3	3	1+1+1	1+2	2+1		
4	5	1+1+1+1	1+2+1	1+1+2	2+1+1	2+2

按最后一步所走楼梯的阶数（1 或者 2）分类，利用加法规则，得

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

其中 $f(n-1)$ 表示最后一步上了一阶楼梯的方案数，$f(n-2)$ 表示最后一阶上了两阶楼梯的方案数。