

组合数学

Fibonacci 数

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



斐波那契数，又称黄金分割数，因意大利数学家斐波那契（Fibonacci, 1175—1250）以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”。

我们先来看一下斐波那契提出的如下关于兔子繁殖的著名问题：

例 1

某人在一个封闭的空间里养了一对新生的雌雄小兔。他希望知道一年内它们会产出多少对兔子，其关于兔子的假设条件如下：

- ① 一对新生的雌雄兔子一个月后就能长成大兔，再过一个月就能生育一对小兔；
- ② 每对成熟的雌雄兔子每个月都生育一对雌雄小兔；
- ③ 所有兔子都不会死。

问：一对刚出生的小兔，一年内繁殖成多少对兔子？

解 设第 n 个月的兔子对数为 F_n , 则有 $F_1 = F_2 = 1$. 由于第三个月底的兔子对数是前一个月的兔子对数 F_2 加上第三个月的新生兔子对数 F_1 . 因此, $F_3 = F_2 + F_1$. 设第 n 个月新生兔子对数为 Q_n , 则 $Q_n = F_{n-2}$ (注: 只有两个月前的兔子才能产仔).

由于第 n 个月的兔子对数为前一个月的兔子对数加上第 n 个月的新生的兔子对数. 因此, 对于 $n \geq 3$, 有 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

显然, 利用此递推关系和初值, 对给定的 n , 我们可以得到 F_n 的值.

由此我们可以很容易计算出一年结束时兔子的总对数了, 它就是 $F_{12} = 144$.

如上分析可见, 斐波那契提出的兔子繁殖问题可以由下图表示.

推导步骤:

一月 ●

- **初始状态 ($n = 1$):**

第一月仅有一个初始节点 A_1 .

如上分析可见, 斐波那契提出的兔子繁殖问题可以由下图表示.

推导步骤:

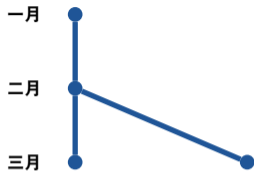
- **初始状态 ($n = 1$):**
第一月仅有一个初始节点 A_1 .
- **迭代 ($n = 2$):**
主干延续, 且无新分支产生, 总数为 1.



如上分析可见, 斐波那契提出的兔子繁殖问题可以由下图表示.

推导步骤:

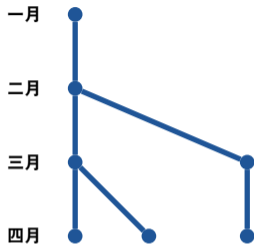
- **初始状态 ($n = 1$):**
第一月仅有一个初始节点 A_1 .
- **迭代 ($n = 2$):**
主干延续, 且无新分支产生, 总数为 1.
- **分支发生 ($n = 3$):**
主干节点产生一个新的分支, 节点数变为 2.



如上分析可见, 斐波那契提出的兔子繁殖问题可以由下图表示.

推导步骤:

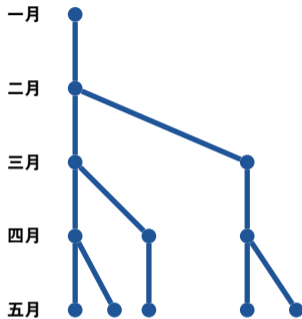
- **初始状态 ($n = 1$):**
第一月仅有一个初始节点 A_1 .
- **迭代 ($n = 2$):**
主干延续, 且无新分支产生, 总数为 1.
- **分支发生 ($n = 3$):**
主干节点产生一个新的分支, 节点数变为 2.
- **递归 ($n = 4$):**
旧分支延续, 主干再次分叉, 形成递归结构.



如上分析可见, 斐波那契提出的兔子繁殖问题可以由下图表示.

推导步骤:

- **初始状态 ($n = 1$):**
第一月仅有一个初始节点 A_1 .
- **迭代 ($n = 2$):**
主干延续, 且无新分支产生, 总数为 1.
- **分支发生 ($n = 3$):**
主干节点产生一个新的分支, 节点数变为 2.
- **递归 ($n = 4$):**
旧分支延续, 主干再次分叉, 形成递归结构.



通项公式

设斐波那契数列满足

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

则对 $n \geq 0$, 有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

证明 递推关系的特征方程为

$$x^2 - x - 1 = 0$$

解得两个根:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

通解形式

$$F_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n$$

由初值 $F_0 = 0, F_1 = 1$ 可得方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组得:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

结论: 代入即得 F_n 的通项公式. □

生成函数

令斐波那契数列的普通生成函数为 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, 则:

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

证明 利用递推关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\ &= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \end{aligned}$$

分别处理两个求和项:

- $\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n = xG(x)$
- $\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n = x^2 G(x)$

代回原式得:

$$G(x) = x + xG(x) + x^2 G(x)$$

移项整理:

$$(1-x-x^2)G(x) = x$$

从而得证. □

例 2

求用多米诺骨牌（可看作一个 2×1 大小的长方块）完全覆盖（横着或者竖着去覆盖）一个 $2 \times n$ 的棋盘的方案数.

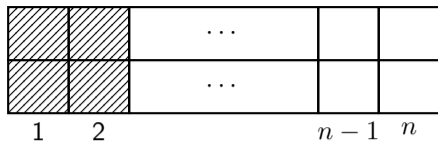
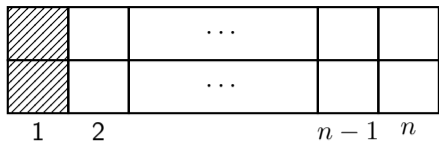


图: $n \times 2$ 棋盘覆盖方案

解 设棋盘如图所示, 令 $g(n)$ 表示 $2 \times n$ 的棋盘的覆盖方案数, 则有

- 若用一个牌竖着覆盖第一列的两个方格, 如左图所示, 那么剩下的是 $2 \times (n - 1)$ 的棋盘的覆盖问题;
- 若用两个牌横着覆盖第一行的前两格和第二行的前两格, 如右图所示, 那么剩下的是 $2 \times (n - 2)$ 的棋盘的覆盖问题.

由加法原则, 这两类覆盖的方案数之和就是 $2 \times n$ 的棋盘覆盖方案数, 因此有

$$g(n) = g(n - 1) + g(n - 2) \quad (n \geq 3),$$

其中初值为 $g(1) = 1$, $g(2) = 2$.

例 3

若一个小孩子上楼梯每次可以上一阶或两阶台阶，问上 n 阶楼梯有多少种不同的方法？

例 3

若一个小孩子上楼梯每次可以上一阶或两阶台阶，问上 n 阶楼梯有多少种不同的方法？

解 记小孩上 n 阶楼梯的方法数为 $h(n)$ ，这些方法可以分成两类：第一步上一阶的和第一步上两阶的，其方法数分别为 $h(n-1)$ 和 $h(n-2)$ 。显然， $h(1) = 1$ ， $h(2) = 2$ 。所以

$$\begin{cases} h(n) = h(n-1) + h(n-2) & (n \geq 3), \\ h(1) = 1, h(2) = 2 \end{cases}$$

故 $h(n) = F_{n+1}$ 。

例 4

求 n ($n \geq 1$) 位且不含两个连续 0 的二进制的字符串的个数.

例 4

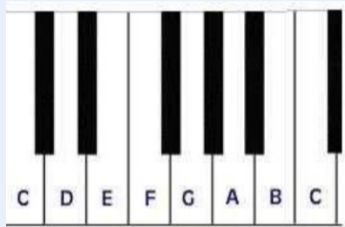
求 $n (n \geq 1)$ 位且不含两个连续 0 的二进制的字符串的个数.

解记 a_n 为不含两个连续 0 的 n 位二进制串的个数, 则由 1 位的二进制串是 0 和 1 可知, $a_1 = 2$. 2 位的二进制串中满足条件的有 01、10 和 11, 所以, $a_2 = 3$. 对 $n \geq 3$, 将 n 位二进制串分为两部分

- ① 不含两个连续 0 并以 1 结尾的 n 位二进制串: 去掉结尾的 1 可知其个数为 a_{n-1} .
- ② 不含两个连续 0 并以 0 结尾的 n 位二进制串: 其第 $n-1$ 位数必是 1, 去掉最后两位 10 之后可得其个数为 a_{n-2} .

所以, 由加法原则可知 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 且 $a_1 = 2 = F_3$, $a_2 = 3 = F_4$. 故有 $a_n = F_{n+2}$.

斐波那契数列实例 1——钢琴键盘



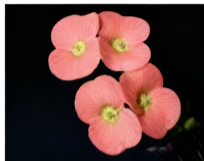
- 钢琴一个八度音程含 13 个键，其中 8 个白键、5 个黑键；
- 5 个黑键分为 2 组，一组有 2 个黑键、一组有 3 个黑键；
- 数字 2, 3, 5, 8, 13 恰好是斐波那契数列的前几项。

斐波那契数列实例 2——花瓣数

1



2



3



5



8



13



21



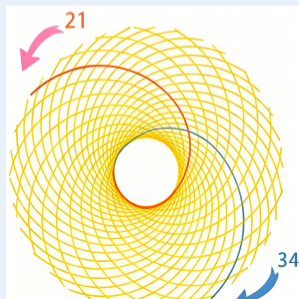
34



- 马蹄莲有 1 个花瓣，虎刺梅有 2 个花瓣，三角梅有 3 个花瓣；
- 鸡蛋花有 5 个花瓣，格桑花有 8 个花瓣，雏菊有 13 个花瓣；
- 紫菀有 21 个花瓣，松叶菊有 34 个花瓣，许多植物花瓣数为斐波那契数。

斐波那契数列实例 3——植物的花序和叶序

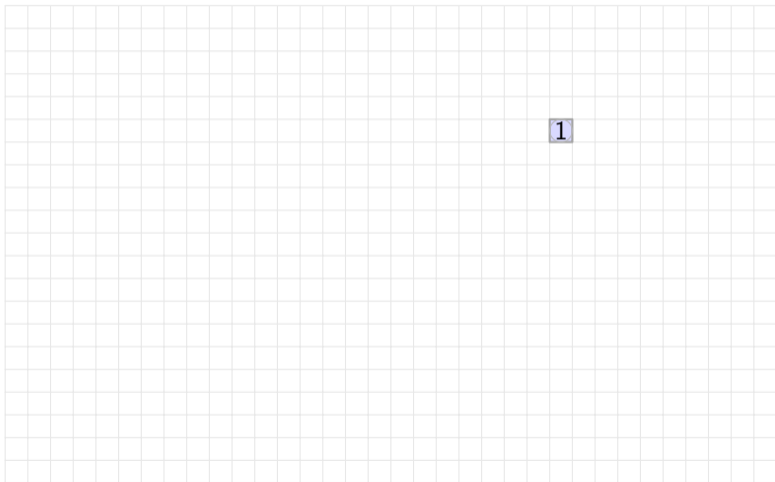
- **松果：**
拥有顺时针 8 条、逆时针 13 条螺旋线
- **向日葵：**
拥有逆时针 21 条、顺时针 34 条螺旋线
- **生物学意义：**
这种螺旋结构是种子的**最佳布局**，
能最大化利用空间。



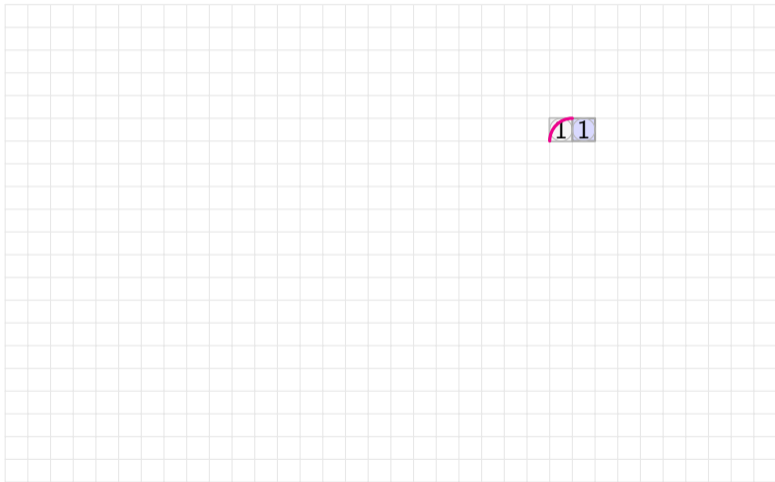
斐波那契铺砌与黄金螺线

逐步解说

从一个 1×1 正方形开始.



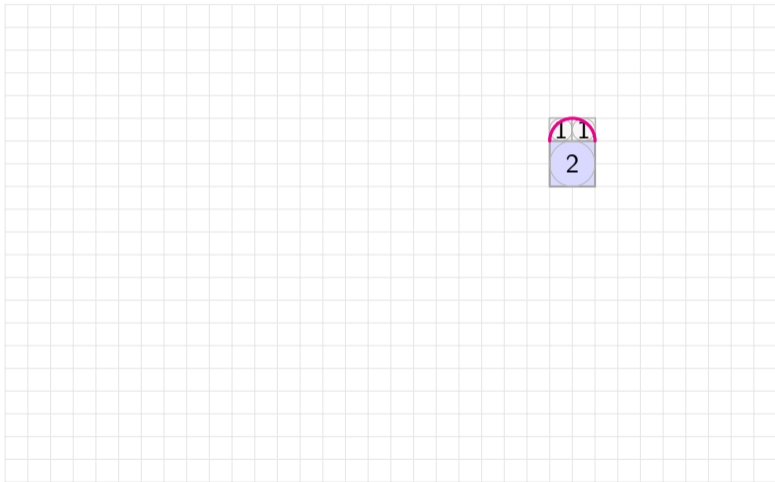
斐波那契铺砌与黄金螺线



逐步解说

再添一个 1×1 : 两块“1”
奠定起点.

斐波那契铺砌与黄金螺线



逐步解说

把两块 1 拼成边长为 2 的正方形： $1 + 1 = 2$.

斐波那契铺砌与黄金螺线

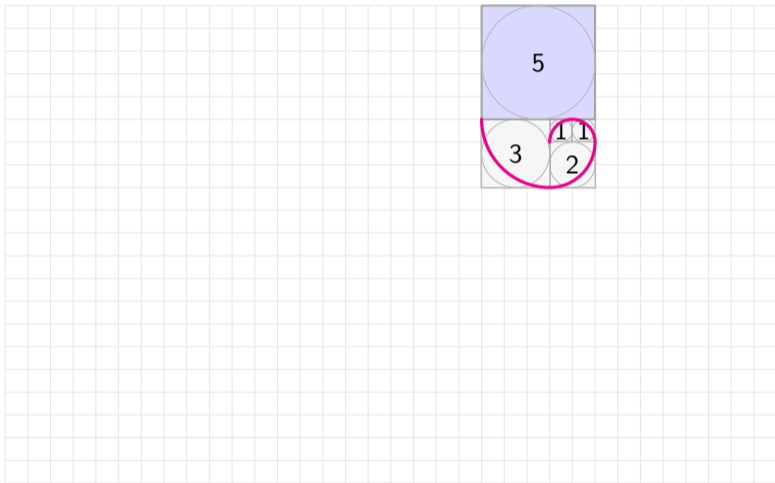
逐步解说

继续外扩，得到边长为 3：

$$1 + 2 = 3.$$



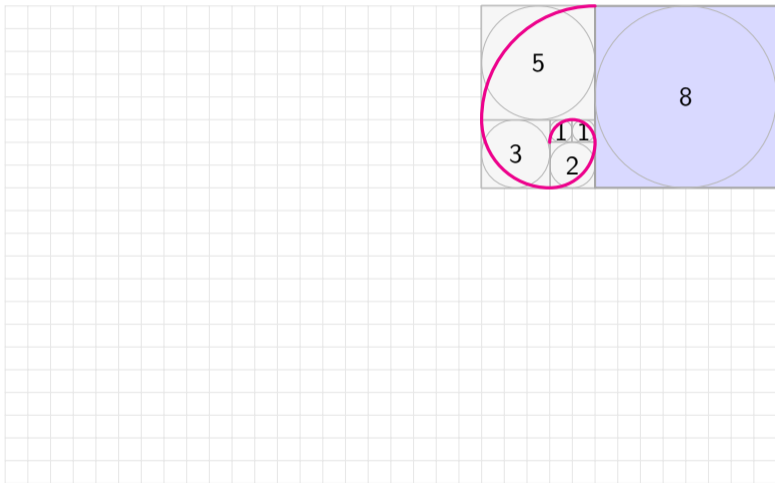
斐波那契铺砌与黄金螺线



逐步解说

再扩一圈，得到边长为 5：
 $2 + 3 = 5$.

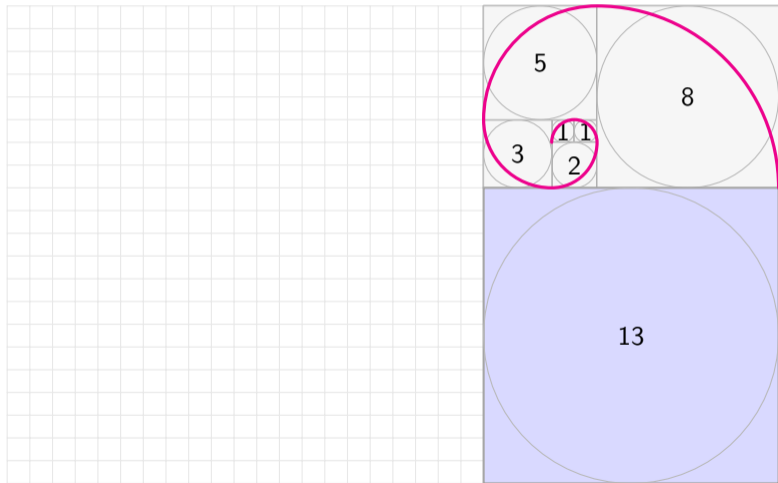
斐波那契铺砌与黄金螺线



逐步解说

下一块边长为 8: $3 + 5 = 8$,
结构开始显著.

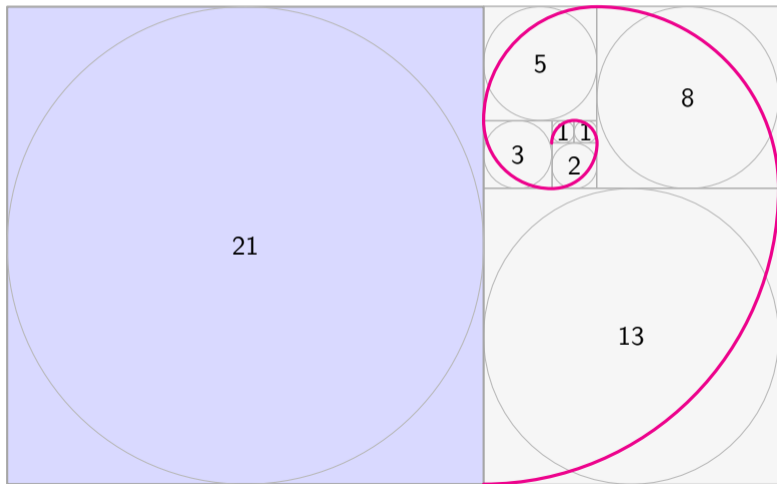
斐波那契铺砌与黄金螺线



逐步解说

边长为 13: $5 + 8 = 13$, 螺
线逐渐稳定.

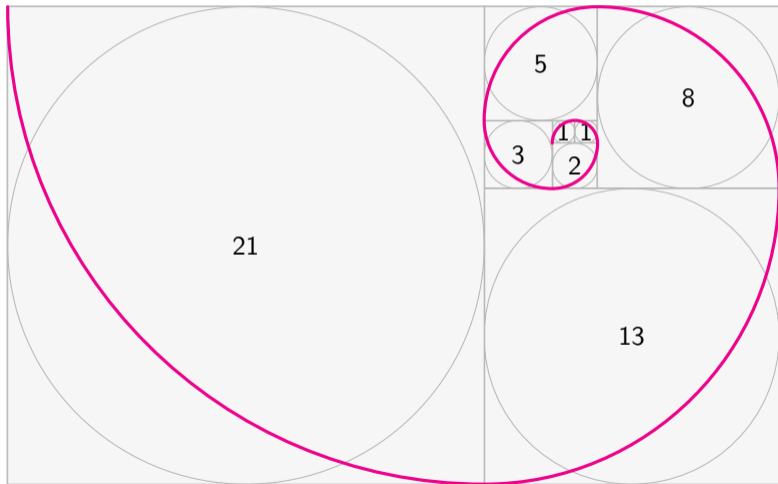
斐波那契铺砌与黄金螺线



逐步解说

最后一块边长为 21:
 $8 + 13 = 21$, 完成铺砌.

斐波那契铺砌与黄金螺线

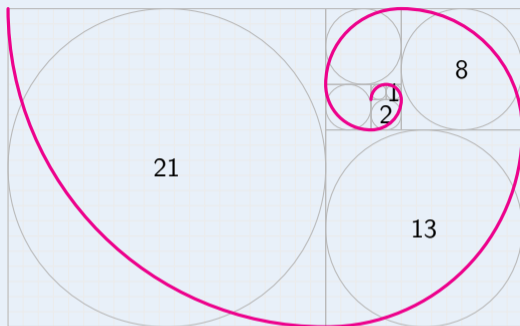


逐步解说

螺线完整呈现：相邻边长之比趋近黄金分割 $\phi \approx 0.618$.

每个正方形的边长等于前两个边长之和，形成斐波那契数列。以正方形顶点为圆心、边长为半径画的 90° 圆弧连起来就是逼近黄金螺线的等角螺线。

斐波那契数列实例 4——黄金分割



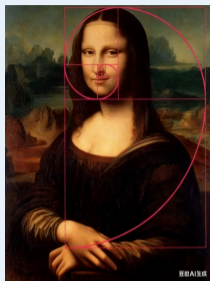
对长为 a 的线段，若

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a},$$

则比值

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618,$$

称为**黄金分割比**。



斐波那契数列相邻项比值

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

的极限为黄金分割比，广泛应用于艺术与自然之中。