# 组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

# 第 5 章　生成函数

# 引论

生成函数是一种既简单又有用的数学方法, 它最早出现于 19 世纪初.

对于组合计数问题, 生成函数是一种最重要的一般性处理方法.

它的中心思想是:

对于一个有限或无限数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

用幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

使之成为一个整体,

然后通过研究幂级数 $A(x)$, 导出数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的构造和性质.

我们称 $A(x)$ 为序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的生成函数, 并记为 $G\{a_n\}$.

通常, 我们用 $[x^n]A(x)$ 表示 $A(x)$ 中 $x^n$ 的系数.

# 引论

实际上，在第 3 章中我们已经使用过生成函数方法. 组合数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$$

的生成函数为

$$f_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

由二项式定理知

$$f_n(x) = (1+x)^n.$$

通过对 $(1+x)^n$ 的运算，可以导出一系列组合数的关系式，例如

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

等等.

## 例 1.1

投掷一次骰子，出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$. 问连续投掷两次，出现的点数之和为 *10* 的概率有多少？连续投掷 *10* 次，出现的点数之和为 *30* 的概率又是多少？

## 例 1.1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$. 问连续投掷两次, 出现的点数之和为 *10* 的概率有多少? 连续投掷 *10* 次, 出现的点数之和为 *30* 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j)(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

## 例 1.1

投掷一次骰子，出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$. 问连续投掷两次，出现的点数之和为 *10* 的概率有多少？连续投掷 *10* 次，出现的点数之和为 *30* 的概率又是多少？

一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j)(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$，共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法，两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

如果问题是连续投掷 10 次，其点数之和为 30 的概率有多少，这时就不那么简单了.

这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多，难以一一列举，要解决这个问题，只能另辟新径.

**解** 我们用多项式

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

表示投掷一次可能出现点数 $1, 2, \cdots, 6$, 观察

$$\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right).$$

从两个括号中分别取出 $x^m$ 和 $x^n$, 使

$$x^m \cdot x^n = x^{10},$$

即是两次投掷分别出现点数 $m, n$, 且 $m + n = 10$. 由此得出, 展开式中 $x^{10}$ 的系数就是满足条件的方法数. 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^{10}$$

中 $x^{30}$ 的系数.

而

$$
\begin{aligned}
&\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}\\
=&x^{10}\left(1-x^6\right)^{10}(1-x)^{-10}\\
=&x^{10}\cdot\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6i}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10-1+i}{i}x^i
\end{aligned}
$$

所以, $x^{30}$ 的系数为

$$\binom{29}{20}-\binom{23}{14}\binom{10}{1}+\binom{17}{8}\binom{10}{2}-\binom{11}{2}\binom{10}{3}=2930455.$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}}\approx 0.0485$$

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念.

我们称幂级数 (2) 是形式幂级数, 其中的 $x$ 是未定元, 看作是抽象符号.

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的未定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

称为 $\mathbb{R}$ 上的形式幂级数.

# 形式幂级数

一般情况下，形式幂级数被认为是形式的，$x$ 只是一个抽象符号，并不需要对 $x$ 赋予具体数值，因而就不需要考虑它的收敛性.

在这样定义下，解析收敛不是问题，对于 $\sum_{n\geq 0} n!x^n$，除了在 $x=0$ 处外没有其他点收敛，我们也可讨论形式幂级数.

**定义 2.1**

设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 $\mathbb{R}$ 上的两个形式幂级数，若对任意 $k\geqslant 0$，有 $a_k=b_k$，则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等，记作 $A(x)=B(x)$.

我们用符号

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ 对于所有的} n \geq 0 \right\}$$

表示形式幂级数的集合.

它的加法、数乘、乘法规则定义如下

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, x^n,$$

$$c \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (c a_n)\, x^n,$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 且

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

## 定理 2.2

对 $\mathbb{R}[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0\neq 0$.

**证明** $\Rightarrow$ 设存在 $B(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j$ ，使 $A(x)B(x)=1$

比较两边的常数项得到 $a_0b_0=1$, 因而 $a_0\neq 0$.

$\Leftarrow$ 若 $a_0\neq 0$.

$$\begin{cases} a_0b_0=1 \\ a_1b_0+a_0b_1=0 \\ a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0 \\ \dots \\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=0 \\ \dots \end{cases}$$

其为关于 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 的一个非齐次线性方程组,

对任意固定的正整数 $k$, 将 $b_0,b_1,\dots,b_k$ 当作未知量, 解前 $k+1$ 个非齐次线性方程组.

前 $k+1$ 个方程的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & 0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{k+1} \neq 0$$

由克拉默法则知该非齐次线性方程组有唯一解,

即方程组对（$b_0, b_1, \ldots, b_k$）有唯一解.

所对应形式幂级数为

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

则 $B(x)$ 为 $A(x)$ 的乘法逆元.

## 例 2.1

**求 $(1-x)$ 的逆元**

## 例 2.1

**求 $(1-x)$ 的逆元**

**解** 令 $A(x)=(1-x)$，设其逆为 $B(x)=\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

$$a_0=1, \quad a_1=-1, \quad a_i=0 \quad (i=2,3,\cdots)$$

由 $A(x)B(x)=1$，对应关于 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_0b_0=1, \\ a_1b_0+a_0b_1=0, \\ a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0, \\ \cdots \\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=0, \\ \cdots \end{cases}$$

解得 $b_i=1 \quad (i=0,1,2,\cdots)$. 故

$$B(x)=\sum_{n\geq 0} x^n.$$

考虑 $A(x)=\sum_n a_n x^n$ 与 $B(x)$ 的 复合 为

$$A(B(x))=\sum_{n\geq 0} a_n B(x)^n.$$

上式右边是关于形式幂级数的无限求和，而不仅仅是形式变量.

为讨论这样的和，需要在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中引入收敛的概念. (略)

**定理 2.3**

给定 $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$, 则
复合 $A(B(x))$ 存在 当且仅当 $A(x)$ 为多项式 或者 $B(x)$ 常数项为 *0*.

(证明略)

因此，不存在形式幂级数 $e^{x+1}$.

在整环 $\mathbb{R}[[x]]$ 上还可以定义形式导数.

## 定理 2.4

对于任意 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$, 规定

$$\mathrm{D}A(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

称 $\mathrm{D}A(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数.

$A(x)$ 的 $n$ 阶形式导数可以递归地定义为

$$\begin{cases} \mathrm{D}^0 A(x) \equiv A(x) \\ \mathrm{D}^n A(x) \equiv \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{n-1} A(x)\right) \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

形式导数满足如下规则:

(1) $\mathrm{D}[\alpha A(x)+\beta B(x)]=\alpha \mathrm{D} A(x)+\beta \mathrm{D} B(x)$

(2) $\mathrm{D}[A(x) \cdot B(x)]=A(x) \mathrm{D} B(x)+B(x) \mathrm{D} A(x)$

(3) $\mathrm{D}\left(A^{n}(x)\right)=n A^{n-1}(x) \mathrm{D} A(x)$

由此可知, 形式导数满足微积分中求导运算的规则.

当某个形式幂级数在某个范围内收敛时, 形式导数就是微积分中的求导运算.

为了书写方便, 以后用 $A'(x)$, $A''(x), \cdots$ 分别代表 $\mathrm{D} A(x), \mathrm{D}^{(2)} A(x), \cdots$ .

设数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的生成函数为 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$,

数列 $\{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$ 的生成函数为 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.

我们可以得到生成函数的如下一些性质:

## 性质 1

若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < \ell) \\ a_{k-\ell} & (k \geqslant \ell) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^{\ell} \cdot A(x).$$

## 性质 2

若 $b_k = a_{k+l}$, 则

$$B(x) = \frac{1}{x^l} \left( A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k \right).$$

## 性质 3

若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$.

## 性质 3

若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$.

**证明** 由假设条件, 有

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0, \\
b_1 &= a_0 + a_1, \\
b_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\
&\cdots\cdots \\
b_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

## 性质 3

若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$.

**证明** 由假设条件, 有

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0, & a_0 &= b_0,\\
b_1 &= a_0 + a_1, & a_1 &= b_1 - b_0,\\
b_2 &= a_0 + a_1 + a_2, & a_2 &= b_2 - b_1,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
b_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k, & a_n &= b_n - b_{n-1},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

## 性质 3

若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$.

**证明** 由假设条件, 有

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0, & a_0 &= b_0, \\
b_1 &= a_0 + a_1, & a_1 &= b_1 - b_0, \\
b_2 &= a_0 + a_1 + a_2, & a_2 &= b_2 - b_1, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
b_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k, & a_n &= b_n - b_{n-1}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

把右边各式的两边分别相加, 得

$$
\begin{aligned}
A(x) &= b_0 + (b_1 - b_0)x + (b_2 - b_1)x^2 + \cdots + (b_n - b_{n-1})x^n + \cdots \\
&= B(x) - xB(x)
\end{aligned}
$$

因此,

$$
B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.
$$

## 性质 4

若 $b_k = ka_k$, 则

$$B(x) = xA'(x).$$

## 性质 4

若 $b_k = ka_k$，则

$$B(x) = xA'(x).$$

**证明** 由 $A'(x)$ 的定义知

$$xA'(x) = x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x).$$

## 性质 5

若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x).$$

## 性质 6

若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x).$$

这两个性质可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出.

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和.

下面列出常见的几个数列的生成函数:

(1) $G\{1\}=\frac{1}{1-x}$;

(2) $G\left\{a^{k}\right\}=\frac{1}{1-ax}$;

(3) $G\{k\}=\frac{x}{(1-x)^{2}}$;

(4) $G\{k(k+1)\}=\frac{2x}{(1-x)^{3}}$;

(5) $G\left\{k^{2}\right\}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^{3}}$;

(6) $G\{k(k+1)(k+2)\}=\frac{6x}{(1-x)^{4}}$;

(7) $G\left\{\frac{1}{k!}\right\}=\mathrm{e}^{x}$;

(8) $G\left\{\binom{\alpha}{k}\right\}=(1+x)^{\alpha}$;

(9) $G\left\{\binom{n+k}{k}\right\}=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

下面证明其中的几个生成函数.

**证明** (3)

$$G\{k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$= x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(4)

$$G\{k(k+1)\} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^k = \left(x\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)'$$

$$= \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

**或者**

$$G\{k(k+1)\} = x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)''$$

$$= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

(5)

$$\begin{aligned} G\left\{k^2\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} G\left\{k^2\right\} &= x\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' = x\left(G\{k\}\right)' \\ &= x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和。

下面的两个例子说明了一些求解方法。

## 例 3.1

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x},$$

求 $a_n$.

## 例 3.1

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x},$$

求 $a_n$.

**解** 用部分分式的方法得

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} + 3x,$$

而

$$\frac{2}{1-2x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n.$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}$$

## 例 3.2

计算级数

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

的和.

## 例 3.2

计算级数

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

的和.

**解** 由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列 $\{n^2\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

此处, $a_k = k^2$. 令

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2,$$

则

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

因此, 数列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$
$$= \left(x + x^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k.$$

比较等式两边 $x^n$ 的系数, 得

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n-1}{3}$$
$$= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

# 组合数的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题.

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

(1) 求 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 $k$ 组合数;

(2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 $k$ 组合数;

(3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

其中,

- 问题 (1) 是普通集合的组合问题;
- 问题 $(2)$ 转化为不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

  的非负整数解的个数问题;

- 问题 (3) 是利用容斥原理在 $M=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$ 中求不满足下述三个性质:

  $P_1 : 10$ 组合中 $a$ 的个数大于或等于 4 ;

  $P_2 : 10$ 组合中 $b$ 的个数大于或等于 5 ;

  $P_3 : 10$ 组合中 $c$ 的个数大于或等于 6

  的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同.

下面我们将看到, 引入生成函数的概念后, 上述三类组合问题可以统一地处理.

# 问题 (2) 的解决

我们先从问题 (2) 开始. 令

$$M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$$

的 $k$ 组合数为 $b_k$. 考虑 $n$ 个形式幂级数的乘积

$$\underbrace{\left(1+x+x^2+\cdots\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)\cdots\left(1+x+x^2+\cdots\right)}_{n\text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个 $x^k$ 均为

$$x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_n}=x^k \quad (m_1+m_2+\cdots+m_n=k)$$

其中 $x^{m_1},x^{m_2},\cdots,x^{m_n}$ 分别取自代表 $a_1$ 的第一个括号,

代表 $a_2$ 的第二个括号 $\cdots\cdots$ 代表 $a_n$ 的第 $n$ 个括号;

$m_1,m_2,\cdots,m_n$ 分别表示取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的个数.

于是, 每个 $x^k$ 都对应着多重集合 $M$ 的一个 $k$ 组合.

# 问题 (2) 的解决

因此

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$

中 $x^k$ 的系数就是 $M$ 的 $k$ 组合数 $b_k$. 由此得出序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

从而

$$b_k = \binom{n-1+k}{k}.$$

这时, 我们再次得到了第 2 章中多重集合 $M$ 的 $k$ 组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的.

# 问题 (3) 的解决

用生成函数方法解问题 (3) 尤为简单.

将 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 $k$ 组合数记为 $b_k$, $\{b_k\}$ 的生成函数就是

$$\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right).$$

其原因是展开式中的 $x^k$ 必定为

$$x^{m_1}x^{m_2}x^{m_3}=x^k \quad (m_1+m_2+m_3=k).$$

由于 $x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}$ 分别取自第一、第二、第三个括号, 故

$$0\leqslant m_1\leqslant 3, 0\leqslant m_2\leqslant 4, 0\leqslant m_3\leqslant 5.$$

于是每个 $x^k$ 对应集合 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的一个 $k$ 组合. 特别令 $k=10$, 则

$$\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2+x^3\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\\
=&\left(1-x^4\right)\cdot\left(1-x^5\right)\cdot\left(1-x^6\right)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}\\
=&\left(1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n.
\end{aligned}$$

# 问题 (3) 的解决

所以, $x^{10}$ 的系数 $b_{10}$ 为

$$\begin{aligned} b_{10} =& \binom{10+2}{10} - \binom{6+2}{6} - \binom{5+2}{5} - \binom{4+2}{4} + \binom{1+2}{1} + \binom{0+2}{0} \\ =& 6 \end{aligned}$$

与第 4 章中用容斥原理得到的结果相同.

在普通集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 $k$ 组合中, $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 或者出现或者不出现, 故该集合的 $k$ 组合数序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

从而

$$b_k = \binom{n}{k}.$$

## 定理 4.1

设从 $n$ 元集合 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中取 $k$ 个元素的组合数为 $b_k$, 若限定元素 $a_i$ 出现的次数集合为 $M_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

## 定理 4.1

设从 $n$ 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中取 $k$ 个元素的组合数为 $b_k$, 若限定元素 $a_i$ 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

## 例 4.1

求多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的每个 $a_i$ 至少出现一次的 $k$ 组合数 $b_k$.

**解** 由定理 5.4.1 知

$$M_i = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

于是

$$\begin{aligned} G\{b_k\} &= \left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n \\ &= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} x^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k, \end{aligned}$$

所以

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \binom{k-1}{n-1} & (k \geqslant n) \end{cases}$$

# 组合型分配问题的生成函数

## 定理 4.2

把 $k$ 个相同的球放入 $n$ 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，限定盒子 $a_i$ 的容量集合为 $M_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

## 定理 4.2

把 $k$ 个相同的球放入 $n$ 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，限定盒子 $a_i$ 的容量集合为 $M_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

**证明** 不妨设盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中放入的球数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$$

一种符合要求的放法相当于 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的一个 $k$ 组合，前面关于盒子 $a_i$ 容量的限制转变成 $k$ 组合中 $a_i$ 出现次数的限制. 由定理 5.4.1 知，组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M,} x^m\right).$$

## 例 4.2

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

## 例 4.2

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

**解** 本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$M_1 = \{3, 4, \cdots\} \qquad M_2 = \{2, 3, \cdots\} \qquad M_3 = \{4, 5, \cdots\}$$
$$M_4 = \{6, 7, \cdots\} \qquad M_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + x^4 + \cdots\right)\left(x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(x^4 + x^5 + \cdots\right) \\
&\cdot\left(x^6 + x^7 + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\
=&x^{15} \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^5 = x^{15} \cdot \frac{1}{(1-x)^5} \\
=&x^{15} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^n
\end{aligned}$$

其中, $x^{20}$ 的系数 $\binom{5+4}{5} = 126$ 就是满足条件的整数解的个数.

## 例 4.3

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

的整数解个数.

## 例 4.3

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

**解** 令

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 + 2,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4 - 3,$$

则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即

$$0 \le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0 \le y_3 \le 5,\ 0 \le y_4 \le 6$$

.

对应的生成函数为

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\
&\quad\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2\\
=&\frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)^2}{(1-x)^4}\\
=&(1-x^5-x^6-2x^7+x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+x^{14}-2x^{18}-x^{19}-x^{20}+x^{25})\\
&\quad\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k
\end{aligned}
$$

所以它的 $x^{16}$ 的系数为

$$
\begin{aligned}
&\binom{16+3}{3}-\binom{11+3}{3}-\binom{10+3}{3}-2\binom{9+3}{3}+\binom{5+3}{3}\\
&\quad+2\binom{4+3}{3}+2\binom{3+3}{3}+\binom{2+3}{3}\\
=&969-364-286-2\times 220+56+2\times 35+2\times 20+10\\
=&55.
\end{aligned}
$$

## 例 4.4

设有 $2$ 个红球、$1$ 个黑球、$3$ 个白球，若每次从中任取 $3$ 个球，有多少种不同的取法？

## 例 4.4

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个白球，若每次从中任取 3 个球，有多少种不同的取法？

**解 方法** 1：

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1+x+x^2+x^3\right) \\
=&\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x} \\
=&\left(1-x^2-x^3+x^5\right)\left(1-x^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k
\end{aligned}
$$

$x^3$ **的系数为** $\binom{5}{2}-\binom{3}{2}-\binom{2}{2}=10-3-1=6$

**方法** 2：$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,3)(0,1,2)(1,0,2)(1,1,1)(2,0,1)(2,1,0)$

## 例 4.5

设有 $1g$、$2g$、$3g$、$4g$ 的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量 ? (0g 不计入)

## 例 4.5

设有 $1g$、$2g$、$3g$、$4g$ 的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量？(0g 不计入)

**解** $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

## 例 4.5

设有 $1g$、$2g$、$3g$、$4g$ 的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量？($0g$ 不计入)

**解** $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

## 例 4.6

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

### 例 4.5

设有 $1g$、$2g$、$3g$、$4g$ 的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量？($0g$ 不计入)

**解** $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

### 例 4.6

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

**解** $1+1+1+1 \quad 1+1+2 \quad 1+3 \quad 2+2$, 故四种.

### 例 4.7

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 $n$ 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个 (包括 $0$ 个), 香蕉有 $5$ 的倍数个 (包括 $0$ 个), 橘子不超过 $4$ 个, 梨最多 $1$ 个.

## 例 4.7

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 $n$ 个水果的不同水果篮的个数，其中要求苹果有偶数个 (包括 $0$ 个)，香蕉有 $5$ 的倍数个 (包括 $0$ 个)，橘子不超过 $4$ 个，梨最多 $1$ 个.

**解**

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x^2+\cdots+x^{2n}+\cdots\right)\left(1+x^5+\cdots+x^{5n}+\cdots\right)\\
&\quad\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)(1+x)\\
=&\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot(1+x)\\
=&\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k
\end{aligned}
$$

故所求为 $n+1$ 种.

## 例 4.8

求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 满足条件 $x_1 \leqslant 8, x_2 \leqslant 8,\ x_3 \leqslant 8$ 的非负整数解的个数.

## 例 4.8

求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 满足条件 $x_1 \leqslant 8, x_2 \leqslant 8,\ x_3 \leqslant 8$ 的非负整数解的个数.

**解** 设所求为 $N$, 则 $N$ 是

$$A(t) = \left(1 + t + t^2 + \cdots + t^8\right)^3$$

展开式中 $t^{14}$ 的系数, 而

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(\frac{1-t^9}{1-t}\right)^3 = \left(1-t^9\right)^3 (1-t)^{-3} \\ &= \left(1 - 3t^9 + 3t^{18} - t^{27}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} t^k, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} N &= \binom{14+2}{2} - 3\binom{5+2}{2} \\ &= \binom{16}{2} - 3\binom{7}{2} = 120 - 3 \times 21 = 57 \end{aligned}$$

## 例 4.9

求方程 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21$ 的正整数解的个数。

## 例 4.9

求方程 $x_1+2x_2+4x_3=21$ 的正整数解的个数。

**解** 设所求为 $N$, 故 $N$ 是

$$A(t)=\left(t+t^2+\cdots\right)\cdot\left(t^2+t^4+t^6+\cdots\right)\cdot\left(t^4+t^8+t^{12}+\cdots\right)$$

展开式中 $t^{21}$ 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=t\,(1-t)^{-1}\cdot t^2\left(1-t^2\right)^{-1}\cdot t^4\left(1-t^4\right)^{-1}\\&=t^7\,(1+t)\left(1-t^2\right)^{-2}\left(1-t^4\right)^{-1}\\&=t^7\,(1+t)\left(1+t^2\right)^{2}\left(1-t^4\right)^{-3}\\&=\left(t^7+t^8+2t^9+2t^{10}+t^{11}+t^{12}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^{4k}.\end{aligned}$$

且只有 $9+4k=21$ 有整数解，解为 $k=3$, 所以

$$N=2\cdot\binom{3+2}{2}=20$$

## 例 4.10

求由直线 $x+3y=12$, 直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 所围成的三角形 (包括边界) 的整点 (横坐标和纵坐标均是整数的点) 的个数.

## 例 4.10

求由直线 $x+3y=12$, 直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 所围成的三角形 (包括边界) 的整点 (横坐标和纵坐标均是整数的点) 的个数.

**解** 设所求为 $N$, 则 $N$ 是满足条件 $x+3y\leqslant 12$ 的非负整数率的个数. 令 $z=12-x-3y$, 如果 $x+3y\leqslant 12$, 则 $z\geqslant 0$ 且 $x+3y+z=12$, 所以 $N$ 是方程 $x+3y+z=12$ 的非负整数解的个数, 故 $N$ 是

$$A(t)=\left(1+t+t^2+\cdots\right)^2\left(1+t^3+t^6+\cdots\right)$$

展开式中 $t^{12}$ 的系数, 而

$$\begin{aligned}
A(t)&=(1-t)^{-2}\left(1-t^3\right)^{-1}\\
&=\left(1+t+t^2\right)^2\left(1-t^3\right)^{-3}\\
&=\left(1+2t+3t^2+2t^3+t^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^{3k},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
N&=\binom{4+2}{2}+2\cdot\binom{3+2}{2}\\
&=15+20=35.
\end{aligned}$$

## 例 4.11

求平面直角坐标系 $Oxy$ 中, 以 $A(5,0), B(0,5), C(-5,0), D(0,-5)$ 为顶点的正方形 (包括边界) 的整点的个数.

## 例 4.11

求平面直角坐标系 $Oxy$ 中, 以 $A(5,0), B(0,5), C(-5,0), D(0,-5)$ 为顶点的正方形 (包括边界) 的整点的个数.

**解** 设所求为 $N$. 过点 $A(5,0)$ 和点 $B(0,5)$ 的直线方程为 $x+y=5$.

由对称性知, 点 $(x,y)$ 是该正方形内的一个整点的充分必要条件是

$$|x|+|y| \leqslant 5$$

且 $x$ 和 $y$ 均为整数.

所以 $N$ 是方程

$$|x|+|y|+z=5$$

满足条件 $z \geqslant 0$ 的整数解的个数.

因此, $N$ 是

$$A(t)=\left(1+2t+2t^2+2t^3+\cdots\right)^2\left(1+t+t^2+t^3+\cdots\right)$$

展开式中 $t^5$ 的系数,

而

$$
\begin{aligned}
A(t) &= \left(2(1-t)^{-1}-1\right)^2 (1-t)^{-1} \\
&= (1+t)^2(1-t)^{-3} \\
&= \left(1+2t+t^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \end{pmatrix} t^k,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
N &= \begin{pmatrix} 5+2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4+2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 21+30+10 = 61.
\end{aligned}
$$

**例 4.12**

从 $\{n \cdot a, n \cdot b, n \cdot c\}$ 中取出 $n$ 个字母, 要求 $a$ 的个数为偶数, 问有多少种取法?

# 排列数的指数型生成函数

$n$ 元集合的 $k$ 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式.

# 排列数的指数型生成函数

$n$ 元集合的 $k$ 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数 $x^k$ 改换成 $\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{x^k}{k!} = (1+x)^n,$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念.

数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的指数型生成函数 定义为形式幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

因为 $[x^k]f(x) = \frac{a_k}{k!}$, 所以

$$a_k = k! \cdot [x^k]f(x).$$

## 定理 5.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 $k$ 排列中，若限定元素 $a_i$ 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

**证明** 将和积式展开，得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\ k_i\in M_i,i=1,2,,n}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

只要证明展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数就是满足限定条件的 $k$ 可重排列数即可.

- 首先，对于集合 $M$ 的满足限定条件的每个 $k$ 可重排列，设其中 $a_i$ 出现 $k_i$ 次 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 就是方程

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k\quad(k_i\in M_i,i=1,2,\cdots,n)$$

的一个解.

## 定理 5.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 $k$ 排列中，若限定元素 $a_i$ 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

- 其次，方程 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的每个解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 都对应一类 $k$ 可重排列，此类中的每一个 $k$ 可重排列里，元素 $a_i$ 出现 $k_i$ 次.
- 而此类 $k$ 可重排列的个数就是多重集合 $\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots,k_n\cdot a_n\}$ 的全排列的个数，即 $\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$.
  可见，与解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 相对应的 $k$ 可重排列有 $\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 个.
- 再者，方程 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的不同解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 所对应的不同 $k$ 可重排列类中没有相同的排列.
- 因此，由加法原则，集合 $M$ 满足给定条件的 $k$ 可重排列的总个数为

$$\sum_{\substack{k_1+k_2,\cdots+k_n=k\\(k_1\in M_i,i=1,2,\cdots,n)}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

特别地, 数列 $\{1, 1, \cdots\}$ 的指数型生成函数 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
e^x e^y &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= e^{x+y}.
\end{aligned}$$

特别有

$$e^x e^{-x} = e^0 = 1,$$

从而

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

## 例 5.1

多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 $k$ 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)=(e^x)^n=e^{nx}=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k = n^k$$

## 例 5.2

由数字 $0, 1, 2, 3$ 组成的长为 $k$ 的序列中，要求含有偶数个 $0$ ，问这样的序列有多少个?

## 例 5.2

由数字 $0, 1, 2, 3$ 组成的长为 $k$ 的序列中，要求含有偶数个 $0$，问这样的序列有多少个?

**解** 根据题意，有

$$M_1 = M_2 = M_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$M_0 = \{0, 2, 4, \cdots\}$$

由定理 5.5.1 知，该排列数的指数型生成函数为

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^3 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

$= \left(e^x\right)^3 \cdot \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

$= 1\frac{}{2\left(e^{4x}+e^{2x}\right)}$

$= 1\frac{}{2\left(\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k\right)}$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$b_k = \frac{1}{2}\left(4^k + 2^k\right).$$

## 例 5.3

由 $1, 2, 3, 4$ 能组成多少个 $1$ 出现两次或三次，$2$ 最多出现一次，$4$ 出现偶数次的五位数？

## 例 5.3

由 $1,2,3,4$ 能组成多少个 $1$ 出现两次或三次，$2$ 最多出现一次，$4$ 出现偶数次的五位数？

**解** 根据题意，有

$$M_1=\{2,3\} \qquad M_3=\{0,1,2,\cdots\}$$
$$M_2=\{0,1\} \qquad M_4=\{0,2,4,\cdots\}$$

由定理 $5.5.1$ 知，该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\\
=&\frac{x^2}{6}\left(3+4x+x^2\right)e^x\frac{e^x+e^{-x}}{2}\\
=&\frac{x^2}{12}\left(3+4x+x^2\right)\left(e^{2x}+1\right).
\end{aligned}$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5!\times\frac{1}{12}\left(3\times\frac{2^3}{3!}+4\times\frac{2^2}{2!}+1\times\frac{2^1}{1!}\right)=140,$$

即满足题意的五位数有 140 个.

## 例 5.4

确定每位数字都是奇数, 且 $1$ 和 $3$ 出现偶数次的 $n$ 位数的个数.

## 例 5.4

确定每位数字都是奇数，且 $1$ 和 $3$ 出现偶数次的 $n$ 位数的个数.

**解**

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\\
=&\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot e^{3x}\\
=&\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)\cdot e^{3x}\\
=&\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}5^k\frac{x^k}{k!}+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\\
=&\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(5^k+2\cdot 3^k+1\right)\frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

因此，它的 $\frac{x^n}{n!}$ 系数为

$$\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right).$$

## 例 5.5

求 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 $k$ 排列中每个 $a_i$ 至少出现一次的排列数 $P_k$ 的指数型生成函数。

## 例 5.5

求 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 $k$ 排列中每个 $a_i$ 至少出现一次的排列数 $P_k$ 的指数型生成函数。

**解** 根据题意，有

$$M_i=\{1,2,3,\cdots\}\qquad (1\le i\le n).$$

由定理 5.5.1 知，排列数序列 $\{P_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n &= (e^x-1)^n\\ &=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}e^{(n-i)x}\\ &=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-i)^k x^k}{k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\right)\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

所以

$$P_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\quad (k\ge n).$$

## 例 5.6

用红、白、蓝 $3$ 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色，要求白色方格数是偶数，问有多少种着色方案？

## 例 5.6

用红、白、蓝 $3$ 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色，要求白色方格数是偶数，问有多少种着色方案？

**解**

$$M_r = M_b = \{0, 1, 2, \cdots\},$$
$$M_w = \{0, 2, 4, \cdots\}.$$

于是，分配方案数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\
=&e^{2x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^x\right) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(3x)^n}{n!} + \frac{x^n}{n!}\right).
\end{aligned}$$

因此，$\dfrac{x^n}{n!}$ 的系数 $\dfrac{1}{2}(3^n + 1)$ 就是满足要求的着色方案数.

## 命题 5.2

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!}=\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+1} \frac{x^{\ell}}{\ell!},$$

即 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f'(x)$.

## 命题 5.3

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f^{(i)}(x)$.

## 命题 5.4

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{(k-1)!} = x \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= x f'(x) = x \frac{d}{dx}(f(x)).\end{aligned}$$

## 命题 5.5

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ 且 $P(k)$ 是一个关于 $k$ 的多项式，则 $\{P(k)\,a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$P\left(x\frac{d}{dx}\right)(f(x)).$$

## 命题 5.6

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ 且 $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$，则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^i}{j!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i!}\cdot\frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

即 $\left\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$f(x)g(x).$$

## 例 5.7

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列，如果对任意 $1 \le i \le n$，均有 $\sigma(i) \ne i$. 令 $d_n$ 表示 $S_n$ 中错位排列的总数. 求 $d_n$ 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

由组合解释得

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

由于 $\{1\}_{n\ge 0}$ 的指数型生成函数为 $e^x$，

而 $\{n!\}_{n\ge 0}$ 的指数型生成函数为 $\sum_{n\ge 0} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n\ge 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

由前面的递推关系可得

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x),$$

即

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

## 例

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列，如果对任意 $1 \le i \le n$，均有 $\sigma(i) \ne i$. 令 $d_n$ 表示 $S_n$ 中错位排列的总数. 求 $d_n$ 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

也可以利用错位排列数 $d_n$ 的另外递推关系求解.

考虑 $\sigma \in S_{n+1}$ 的第一位 $\sigma(n+1)$ 的取值，它有 $n$ 种可能.

得到递推关系 (P84)

$$d_{n+1} = n\left(d_n + d_{n-1}\right).$$

所以

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n = xD'(x) + xD(x),$$

或

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

从而

$$D(x) = \frac{1}{1-x} e^{-x+c}.$$

当 $x = 0$ 时, $D(x) = d_0 = 1$, 得到 $c = 0$, 这也求出

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

展开得到

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right) x^n$$

所以

$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

这表明, 在 $S_n$ 中任取一个置换, 它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$, 其极限是 $e^{-1} (n \to \infty)$. 这真是个奇妙但并不显然的事实.

## 普通型生成函数

令 $a_n$ 表示在一个 $n$-集合上完成某个任务的方法数, $a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$, 令 $b_n$ 表示将区间集合 $[n]$ 划分成任意的非空子区间, 然后在这些非空子区间上完成前面任务的方法数, $b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 的普通型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明

$$b(x) = \frac{1}{1 - f(x)}.$$

## 指数型生成函数

令 $a_n$ 表示在一个 $n$-集合上完成某个任务的方法数, $a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$, 令 $b_n$ 表示将 $n$-集合 $[n]$ 划分成任意的非空子集, 然后在这些非空子集上完成前面任务的方法数, $b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 的指数型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明

$$b(x) = e^{f(x)}.$$