组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

第 3 章　容斥原理

容斥原理

1. 引论
2. 容斥原理
3. 容斥原理的应用
4. 偏序集上的反演公式

例 1

求 *1* 到 *600* 之间不能被 *6* 整除的整数个数.

例 1

求 *1* 到 *600* 之间不能被 *6* 整除的整数个数.

先计算 1 到 600 之间能被 6 整除的整数个数，然后从总数中去掉它.

例 1

求 *1* 到 *600* 之间不能被 *6* 整除的整数个数.

先计算 1 到 600 之间能被 6 整除的整数个数，然后从总数中去掉它.

- 1 到 600 之间有 100 个整数可被 6 整除，
- 因此有 $600 - 100 = 500$ 个整数不能被 6 整除.

例 2

求 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 *1* 不在第一个位置上的全排列的个数.

例 2

求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 *1* 不在第一个位置上的全排列的个数.

(1) 直接计数

- 将 $i_1 \neq 1$ 的所有全排列按照 i_1 的取值分为 $n-1$ 类;
- 若 $i_1 = k \in \{2,3,\cdots,n\}$, 则 $i_2 i_3 \cdots i_n$ 是 $\{1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\}$ 的全排列;
- i_1 有 $n-1$ 种取法, $i_2 i_3 \cdots i_n$ 的全排列个数为 $(n-1)!$, 从而 $i_1 \neq 1$ 的全排列数为 $(n-1)(n-1)!$.

例 2

求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 *1* 不在第一个位置上的全排列的个数.

(2) 间接计数

- $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全排列的个数为 $n!$;
- 若 $i_1=1$，则 $i_2i_3\cdots i_n$ 是 $\{2,3,\cdots,n\}$ 的全排列，其个数为 $(n-1)!$, 即 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 1 在第一个位置上的全排列的个数为 $(n-1)!$;
- 所以 1 不在第一个位置的全排列个数为

$$n!-(n-1)!=(n-1)(n-1)!$$

例 3

求不超过 20 的正整数中既不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数的数的个数.

例 3

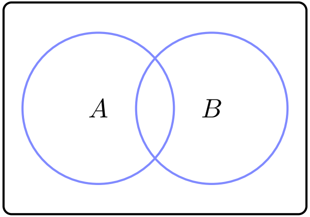
求不超过 *20* 的正整数中既不是 *2* 的倍数，也不是 *3* 的倍数的数的个数.

- 2 的倍数的有 10 个　$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$
- 3 的倍数的有 6 个　$3, 6, 9, 12, 15, 18$
- 既是 2 的倍数又是 3 的倍数的有 3 个　$6, 12, 18$
- 因此，不超过 20 的正整数中是 2 的倍数或是 3 的倍数的数的个数

$$10 + 6 - 3 = 13$$

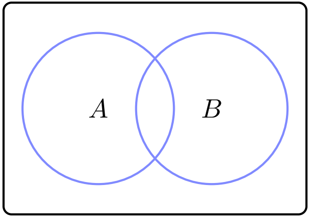
- 由减法原则, 不超过 20 的正整数中既不是 2 的倍数，也不是 3 的倍数的数的个数

$$20 - 13 = 7$$



小结

- $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



例 4

某班有 *100* 人，其中：

- 会打篮球的有 *45* 人，会打乒乓球的有 *53* 人，会打排球的有 *55* 人；
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人，既会打篮球也会打排球的有 *32* 人，既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人；
- 三种球都会打的有 *20* 人.

问三种球都不会打的有多少人？

例 4

某班有 *100* 人，其中：

- 会打篮球的有 *45* 人，会打乒乓球的有 *53* 人，会打排球的有 *55* 人；
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人，既会打篮球也会打排球的有 *32* 人，既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人；
- 三种球都会打的有 *20* 人.

问三种球都不会打的有多少人？

解 设

$$A = \{会打篮球的人\},$$

$$B = \{会打乒乓球的人\},$$

$$C = \{会打排球的人\}.$$

由题意知：

$$|A| = 45, \quad |B| = 53, \quad |C| = 55, |A \cap B| = 28, \quad |A \cap C| = 32, \quad |B \cap C| = 35, |A \cap B \cap C| = 20.$$

例 4

某班有 100 人，其中：

- 会打篮球的有 45 人，会打乒乓球的有 53 人，会打排球的有 55 人；
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 28 人，既会打篮球也会打排球的有 32 人，既会打乒乓球也会打排球的有 35 人；
- 三种球都会打的有 20 人.

问三种球都不会打的有多少人？

为求三种球都不会打的人数，可按以下思路进行：

- 从总人数中减去会打至少一种球的人；
- 由于会打两种球的人被减了两次，应加回来；
- 但三种球都会打的人被加了三次，应再减一次.

例 4

某班有 *100* 人，其中：

- 会打篮球的有 *45* 人，会打乒乓球的有 *53* 人，会打排球的有 *55* 人；
- 既会打篮球也会打乒乓球的有 *28* 人，既会打篮球也会打排球的有 *32* 人，既会打乒乓球也会打排球的有 *35* 人；
- 三种球都会打的有 *20* 人.

问三种球都不会打的有多少人？

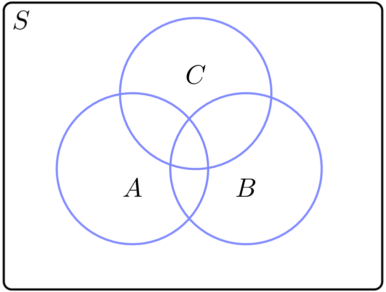
由容斥原理：

$$\begin{aligned}\text{不会打任何球的人数} &= 100-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C| \\ &= 100-(45+53+55)+(28+32+35)-20 \\ &= 22.\end{aligned}$$

因此，三种球都不会打的有 22 人.

设 S 是有限集, $A, B, C \subseteq S$, 则

$$
\begin{aligned}
|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = {} & |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\
& - |A \cap B \cap C| \\
|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
& + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$



容斥原理

容斥原理

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m\right|.$$

容斥原理

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m\right|.$$

证明 我们要证明

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap \cdots \cap A_m|.$$

证明思路：逐个考察 S 中的元素 x 对右端的“贡献”．

- 对每个 $x \in S$，定义指示函数
$$I_T(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcap_{i \in T} A_i, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$
其中 $T \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. 那么右端可写作
$$\sum_{x \in S} \left(1 - \sum_i I_{\{i\}}(x) + \sum_{i<j} I_{\{i,j\}}(x) - \cdots\right).$$

容斥原理的证明（续）

对固定的 $x \in S$，讨论两种情况.

(1) x 不属于任何 A_i

此时对所有非空 T 都有 $I_T(x) = 0$，括号内的值为 1，即 x 的贡献为 1. 这类元素正是 $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_m}$ 的元素.

(2) x 属于 k 个集合 $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$

此时 $I_T(x) = 1$ 当且仅当 $T \subseteq \{i_1, \ldots, i_k\}$. 因此 x 的贡献为

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} = (1-1)^k = 0.$$

即所有属于至少一个 A_i 的元素贡献均为 0.

综上，只有不属于任何 A_i 的元素贡献为 1，故右端之和恰为左端的大小，容斥原理得证.

容斥原理

$$\begin{aligned}&\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right|\\&=|S|-\sum_{1\le i\le m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|-\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|\end{aligned}$$

推论

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|\\&=\sum_{1\le i\le m}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|\end{aligned}$$

例 5

在 *1* 与 *1000* 之间不能被 *5,6,8* 整除的整数有多少个？

例 5

在 1 与 1000 之间不能被 5,6,8 整除的整数有多少个？

解 令 $A=\{1,2,3,\cdots,1000\}$.

记 A_1,A_2,A_3 分别为 1 与 1000 之间能被 $5,6,8$ 整除的整数集合，则有

$$|A_1|=\left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor=200,\quad |A_2|=\left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor=166,\quad |A_3|=\left\lfloor\frac{1000}{8}\right\rfloor=125.$$

于是，$A_1\cap A_2$ 表示 A 中能被 5 和 6 整除的数，即能被 30 整除的数，其个数为

$$|A_1\cap A_2|=\left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor=33.$$

$|A_1\cap A_3|$ 表示 A 中能被 5 和 8 整除的数，即能被 40 整除的数，其个数为

$$|A_1\cap A_3|=\left\lfloor\frac{1000}{40}\right\rfloor=25.$$

$|A_2\cap A_3|$ 表示 A 中能被 6 和 8 整除的数，即能被 24 (6 和 8 的最小公倍数 $\mathrm{lcm}(6,8)=24$) 整除的数，其个数为

$$|A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{1000}{24}\right\rfloor=41.$$

例 5

在 *1* 与 *1000* 之间不能被 *5,6,8* 整除的整数有多少个？

$\mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid$ 表示 A 中能同时被 $5,6,8$ 整除的数，即 A 中能被 $5,6,8$ 的最小公倍数 $\operatorname{lcm}(5,6,8)=120$ 整除的数，其个数为

$$\mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

由容斥原理，1 与 1000 之间不能被 $5,6,8$ 整除的数的个数为

$$\begin{aligned}
\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\
&= 600.
\end{aligned}$$

例 6

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中，a, b, c, d 至少出现一次的字符串的个数.

例 6

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中，a, b, c, d 至少出现一次的字符串的个数.

解 记 A_1, A_2, A_3, A_4 分别为不出现 a, b, c, d 的 n 位字符串的集合.

$$|A_i| = 3^n \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_i \cap A_j| = 2^n \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1 \quad (i, j, k \text{ 互不相等}; i, j, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

而 a, b, c, d 至少出现一次的字符串集合即为 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$.

例 6

求由 a, b, c, d 四个字符构成的 n 位字符串中，a, b, c, d 至少出现一次的字符串的个数.

于是

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| &= 4^n - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| \\
&\quad + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
&\quad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\
&\quad + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4
\end{aligned}
$$

容斥原理

- 设 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 S 的元素所涉及的 m 个性质.
- 设 $A_i = \{x \in S \mid x \text{具有性质} P_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$
- 则 $\overline{A_i} = \{x \in S \mid x \text{不具有性质} P_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$

定理

集合 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素个数为

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{1 \le i \le m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.$$

推论

集合 S 中至少具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 之一的元素的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{1 \le i \le m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|.$$

例 7

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个？

例 7

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个？

解 令 S 表示 MATHISFUN 的全排列组成的集合

- P_1：MATH 出现；　P_2：IS 出现；　P_3：FUN 出现；
- A_i：具有性质 P_i 的元的集合 $(i = 1, 2, 3)$

将 MATH 视为整体，与其他字母进行全排列，可得 $|A_1| = 6!$,

例 7

把 *MATHISFUN* 重新排列，使单词 *MATH*、*IS*、*FUN* 不出现的排列共有多少个？

解 令 S 表示 MATHISFUN 的全排列组成的集合

- P_1 : MATH 出现；　P_2 : IS 出现；　P_3 : FUN 出现；
- A_i : 具有性质 P_i 的元的集合 $(i = 1, 2, 3)$

将 MATH 视为整体，与其他字母进行全排列，可得 $|A_1| = 6!$,

同理，

$$|A_2| = 8!, \qquad |A_3| = 7!,$$

$$|A_1 \cap A_2| = 5!, \quad |A_1 \cap A_3| = 4!, \quad |A_2 \cap A_3| = 6!,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!, \quad |S| = 9!$$

于是，$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 9! - (6! + 8! + 7!) + (5! + 4! + 6!) - 3! = 317658$

第二类 Stirling 数

定理

$$S(n,r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n$$

证明 先考虑把 n 个有区别的球放入 r 个有区别的盒子里，且不允许有空盒的方案数.

设 $N(P_i)\ (i=1,2,\cdots,r)$ 表示满足第 i 个盒子为空的方案数，则有

$N(P_i)=(r-1)^n$ ，且不同的 P_i 有 $\binom{r}{1}$ 个；

$N(P_iP_j)=(r-2)^n$ ，且不同的 P_i,P_j 的组合有 $\binom{r}{2}$ 个.

一般地，$N(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k})=(r-k)^n$ ，且不同的 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_k}$ 的组合共有 $\binom{r}{k}$ 个.

而 n 个有区别的球放人 r 个有区别的盒子里，且允许有空盒的方案数为 $N=r^n$.

定理

$$S(n,r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n$$

所以，由容斥原理可知

$$\begin{aligned}N\left(\bar{P}_1\bar{P}_2\cdots\bar{P}_r\right)&=N-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}N\left(P_i\right)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}N\left(P_iP_j\right)-\cdots+(-1)^rN\left(P_1P_2\cdots P_r\right)\\&=r^n-\binom{r}{1}(r-1)^n+\binom{r}{2}(r-2)^n-\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}(r-r)^n\\&=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n\end{aligned}$$

而由 $N\left(\bar{P}_1\bar{P}_2\cdots\bar{P}_r\right)=r!S(n,r)$ 可得，

$$S(n,r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n$$

容斥原理

满射的计数

例 8

从 $\{x_1,...,x_n\}$ 到 $\{y_1,...,y_k\}$ 的满射有多少个？

解 设 S 为所有 $\{x_1,...,x_n\}$ 到 $\{y_1,...,y_k\}$ 的映射的集合，则 $|S| = k^n$.

对于 $1 \leq i \leq k$，定义性质 P_i 为 y_i 不是映射的像，

定义 A_i 为满足性质 P_i 的从 $\{x_1,...,x_n\}$ 到 $\{y_1,...,y_k\}$ 的映射的集合，则

对任意的 $1 \leq i \leq k$ 有 $|A_i| = (k-1)^n$.

对任意的 $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k$ 有 $\left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right| = (k-j)^n$.

注：事实上，所求个数为 $k!S(n,k)$.

满射的计数

例 8

从 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 到 $\{y_1, \ldots, y_k\}$ 的满射有多少个？

这样，所求满射的个数为

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_k}\right| \\
=&|S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<\ell} |A_i \cap A_j \cap A_\ell| + \\
&\cdots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \\
=&\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n
\end{aligned}$$

注：事实上，所求个数为 $k!S(n,k)$.

欧拉函数

例 9

$\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的正整数的个数，求 $\varphi(n)$.

- 例如 $\varphi(5) = 4$, 即 1,2,3,4; $\varphi(12) = 4$，即 1,5,7,11.

例 9

$\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的正整数的个数，求 $\varphi(n)$.

- 例如 $\varphi(5)=4$，即 1,2,3,4；$\varphi(12)=4$，即 1,5,7,11.

解 将 n 分解成素因子的乘积形式

$$n=p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_q^{i_q}.$$

设 A_i 为不大于 n 且为 p_i 的倍数的自然数的集合 $(1\leqslant i\leqslant q)$，则

$$|A_i|=\frac{n}{p_i}\quad (i=1,2,\cdots,q).$$

因 p_i 与 p_j 互素 $(i\neq j)$，所以 p_i 与 p_j 的最小公倍数为 p_ip_j，所以

$$|A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j}\quad (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,q).$$

等等.

小于 n 且与 n 互素的自然数是集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 中那些不属于任何一个集合 A_i 的数.

由容斥原理知

$$\begin{aligned}\varphi(n)=&\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_q}\right|\\=&n-\sum_{i=1}^{q}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant q}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant q}|A_i\cap A_j\cap A_k|\\&+\cdots+(-1)^q|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_q|\\=&n-\sum_{i=1}^{q}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant q}\frac{n}{p_ip_j}-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant q}\frac{n}{p_ip_jp_k}+\cdots+(-1)^q\frac{n}{p_1p_2\cdots p_q}.\end{aligned}$$

上面的和式正好是下列乘积的展开式

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_q}\right).\qquad\square$$

注：欧拉函数常用于数论中. 例如, 若 $n=12=2^2\cdot 3$, 则

$$\varphi(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4$$

例 10

有 n 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡. 不同的取法有多少种？

定义 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个**错排**是该集合的一个满足条件 $\pi_i \neq i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的全排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, 即集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列.

- $n=1$ 时, $\{1\}$ 没有错排.
- $n=2$ 时, $\{1,2\}$ 有唯一一个错排, 为 21.
- $n=3$ 时, $\{1,2,3\}$ 有两个错排, 分别为 231 和 312.

例 10

有 n 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡. 不同的取法有多少种？

定义 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个**错排**是该集合的一个满足条件 $\pi_i \neq i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的全排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$，即集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列.

- $n=1$ 时，$\{1\}$ 没有错排.
- $n=2$ 时，$\{1,2\}$ 有唯一一个错排，为 21.
- $n=3$ 时，$\{1,2,3\}$ 有两个错排，分别为 231 和 312.
- $n=4$ 时，$\{1,2,3,4\}$ 共有下面所列的 9 个错排

$$2143, 3142, 4123, 2341, 3412, 4321, 2413, 3421, 4312.$$

用 d_n 记 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部错排个数，则 $d_1=0, d_2=1, d_3=2, d_4=9$.

定理

对任意正整数 n, 有

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

证明 对于 n 元排列及 $1 \leq i \leq n$, 定义性质 P_i 为 i 在排列下保持不变 (或 i 为不动点).

定义 A_i 为 n 元对称群 S_n 中所有满足性质 P_i 的排列组成的子集.

则

$$d_n = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \overline{A_n}\right|$$

对任意 $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ 为 S_n 中具有不动点 $i_1, \ldots, i_k$ 的排列个数, 即

$$(n-k)!.$$

根据容斥原理，得

$$
\begin{aligned}
D_n &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_n}\right| \\
&= |S_n| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\
&\qquad \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

这表明，在 S_n 中任取一个排列，它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$，其极限是 $e^{-1}(n \to \infty)$.

这真是个奇妙但并不显然的事实. 令人惊讶的是，e 是一个典型的超越数，出现在一个最开始只涉及整数的组合问题的解决方案.

例 11

穿着球衣号为 $1, 2, 3, \ldots, n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列，则有多少种方法让他们重新站队，使得每个人前面的人都已换过？

例 11

穿着球衣号为 $1, 2, 3, \ldots, n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列，则有多少种方法让他们重新站队，使得每个人前面的人都已换过？

例 12

在 S_n 中，有多少个排列不含有任何一个下列二元子序列

$$12, 23, 34, \ldots, (n-1)n?$$

例 11

穿着球衣号为 $1,2,3,\ldots,n$ 的小朋友按号码从小到大的顺序依次排成一列，则有多少种方法让他们重新站队，使得每个人前面的人都已换过？

例 12

在 S_n 中，有多少个排列不含有任何一个下列二元子序列

$$12,23,34,\ldots,(n-1)n?$$

解 用 Q_n 表示这个计数. 对 $1\leqslant i\leqslant n-1$，令 P_i 表示二元子序列 $i(i+1)$ 出现这一性质，X_i 表示满足性质 P_i 的 n 元排列构成的集合.

注意到 $|X_i|=(n-1)!,|X_i\cap X_j|=(n-2)$!. 注意前面第二式无论对 $|j-i|=1$ 还是 $|j-i|>1$ 都成立. 归纳地可得到

$$\left|\cap_{r=1}^{k} X_{i_r}\right|=(n-k)!.$$

所以，

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

例 13 (menage 问题)

n 对夫妇参加宴会围桌就座，要求男女相间并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

有限重数的多重集合的组合数

- 令 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，那么 S 的 r-组合有多少？

有限重数的多重集合的组合数

- 令 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，那么 S 的 r-组合有多少？

$$\binom{n}{r}$$

- 令 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少？

有限重数的多重集合的组合数

- 令 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，那么 S 的 r-组合有多少？

$$\binom{n}{r}$$

- 令 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少？

$$\left(\!\!\binom{n}{r}\!\!\right) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

例 14

令 $M=\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots,k_n\cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少？

例 14

令 $M = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \cdots, k_n \cdot a_n\}$, 那么 M 的 r-组合有多少？

- 如果所有的 $k_i \geq r$, 那么 k_i 对 r-组合的选取不产生影响，
  可令 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = r$，则 $\binom{r+n-1}{r}$ 即为 M 的 r-组合的个数.
- 如果存在某个 $k_i < r$, 那么 k_i 对 r-组合的选取会产生影响，
  令性质 P_i ： r-组合中 a_i 的个数大于或等于 $k_i + 1$,
  集合 A_i ： 满足性质 P_i 的 r-组合的集合，
  $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$ 即为 M 的 r-组合的个数.

例 15

求多重集合 $T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 *10*-组合的数目.

例 15

求多重集合 $T=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$ 的 *10*-组合的数目.

解 令 $T_\infty=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$

- P_1 : 至少 4 个 a　P_2 : 至少 5 个 b　P_3 : 至少 6 个 c
- A_i : 具有性质 P_i 的 10-组合的集合 $(i=1,2,3)$.

$$|S|=\left(\!\!\binom{3}{10}\!\!\right)=\binom{10+3-1}{3-1}=66$$

$$|A_1|=\left(\!\!\binom{3}{6}\!\!\right)=\binom{6+3-1}{3-1}=28$$

$$|A_2|=\left(\!\!\binom{3}{5}\!\!\right)=\binom{5+3-1}{3-1}=21$$

$$|A_3|=\left(\!\!\binom{3}{4}\!\!\right)=\binom{4+3-1}{3-1}=15$$

例 15

求多重集合 $T=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$ 的 *10-*组合的数目.

$$|A_1\cap A_2|=\left(\!\!\binom{3}{1}\!\!\right)=\binom{1+3-1}{3-1}=3$$

$$|A_1\cap A_3|=\left(\!\!\binom{3}{0}\!\!\right)=\binom{0+3-1}{3-1}=1$$

$$|A_2\cap A_3|=0,\qquad |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

由容斥原理，得

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=66-(28+21+15)+(3+1+0)-0=6$$

例 16

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

解 令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3$, 则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即 $0 \le y_1 \le 4$, $0 \le y_2 \le 6$, $0 \le y_3 \le 5$, $0 \le y_4 \le 6$.

这就转化为多重集的 16-组合数问题.

令 S 为方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=16$ 的所有非负整数解构的集合, 定义性质 P_i 为 $y_i \geq n_i+1, 1 \leq i \leq 4$, 这里 $n_1=4, n_2=6, n_3=5, n_4=6$.

令 X_i 表示 S 中满足性质 P_i 的整数解构成的集合.

则

$$|S| = \left(\!\!\binom{4}{16}\!\!\right) = \binom{16+3}{3} = 969$$

$$|X_1| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1}\!\!\right) = \binom{11+3}{3} = 364,$$

$$|X_2| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1}\!\!\right) = \binom{9+3}{3} = 220$$

$$|X_3| = \left(\!\!\binom{4}{16-5-1}\!\!\right) = \binom{10+3}{3} = 286,$$

$$|X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1}\!\!\right) = \binom{9+3}{3} = 220$$

$$|X_1 \cap X_2| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1-6-1}\!\!\right) = \binom{4+3}{3} = 35$$

$$|X_1 \cap X_3| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1-5-1}\!\!\right) = \binom{5+3}{3} = 56$$

$$|X_1 \cap X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-4-1-6-1}\!\!\right) = \binom{4+3}{3} = 35$$

$$|X_2 \cap X_3| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1-5-1}\!\!\right) = \binom{3+3}{3} = 20$$

$$|X_2 \cap X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-6-1-6-1}\!\!\right) = \binom{2+3}{3} = 10$$

$$|X_3 \cap X_4| = \left(\!\!\binom{4}{16-5-1-6-1}\!\!\right) = \binom{3+3}{3} = 20$$

由于 $5+6+7=18>16$, 任意三个及三个以上的 X_i 相交都是空集. 从而原方程解的个数为

$$\begin{aligned}\left|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \overline{X_4}\right| &= 969 - (364+220+286+220) \\ &\quad + (35+56+35+20+10+20)\end{aligned}$$

- 本节主要介绍美国数学家 Rota 于 1964 年建立的偏序集上的默比乌斯反演公式.
- 它以经典默比乌斯反演公式和容斥原理为特例, 用一种简明的方式统一了很多具体结果, 是现代组合数学发展的一个重大成就.

图: Gian-Carlo Rota

- Rota 被广泛认为是现代组合数学的奠基者之一. 他将组合学从“技巧性计数”提升为具有深刻理论结构的数学分支.
- Möbius 函数与偏序集理论: 他在 1964 年发表的经典论文《On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions》中, 系统地将 Möbius 反演推广到偏序集（posets）上, 为组合数学建立了统一的代数框架.
- Rota–Baxter 代数: 他重新发现并推广了 Rota–Baxter 算子 (最初由 Glen Baxter 在概率论中提出), 这一结构后来在量子场论、代数组合中发挥重要作用.
- 组合公理化: 他倡导“组合学的公理化方法”, 强调结构而非具体计算, 影响了后来 Stanley、Zelevinsky 等人的工作.

- 本节主要介绍美国数学家 Rota 于 1964 年建立的偏序集上的默比乌斯反演公式.
- 它以经典默比乌斯反演公式和容斥原理为特例, 用一种简明的方式统一了很多具体结果, 是现代组合数学发展的一个重大成就.

图: Gian-Carlo Rota

- 推动组合数学进入主流数学视野，使其成为与代数、几何、分析并列的核心领域.
- 在 MIT 培养了大批优秀学生，包括 Richard P. Stanley、陈永川、颜华菲等.
- 创办并主编《Advances in Mathematics》多年，提升其为顶尖数学期刊.
- 提出"数学的十诫"（Ten Lessons I Wish I Had Been Taught），成为广为流传的学术写作与演讲指南.
- 著有《Indiscrete Thoughts》(《不羁的思绪》)，其中包含对数学家如冯·诺依曼、哥德尔、麦克莱恩等人的犀利评论.

偏序集的概念

定义 1

设在集合 P 上定义一种二元关系 $\leq$, 它具有下列性质:

1. 对任意 $x \in P$, 有 $x \leq x$ (自反性);
2. 若 $x \leq y$, $y \leq x$, 则 $x = y$ (反对称性);
3. 若 $x \leq y$, $y \leq z$, 则 $x \leq z$ (传递性);

则称 P 是以 $\leq$ 为序关系的偏序集, 记为 $(P, \leq)$. 在不引起混淆时, 常把 $(P, \leq)$ 简记为 P.

例如, 数的大小关系 "$\geq$" 是整数集合上的偏序.

仿照通常不等式的记法, $x \leq y$ 也可以写作 $y \geq x$;

若 $x \leq y$, 并且 $x \neq y$, 则可记作 $x < y$;

若 $x \leq y$ 不成立, 则可记作 $x \not\leq y$, 表示 x 与 y 或者不能比较, 或者 $x > y$.

偏序集中的区间

特别地，若偏序集 P 中每对元素都存在序关系，则称 P 为全序集.

具有 n 个元素的全序集一定可以将其元标记成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，这个 n 元全序集可记为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}_<$，也称作一个 n 元链.

定义 2

对偏序集 P 中两个元 x 和 y，集合 $[x, y] = \{z \in P | x \leqslant z \leqslant y\}$ 称为 P 中的一个区间.

当 x 与 y 不能比较时，$[x, y]$ 为空集. 有时需要忽略端点，就用开或半开区间. 例如，$[x, y) = \{z \in P | x \leqslant z < y\}$.

$++$

定义 3

若偏序集 P 中任一区间都是有限集，则称 P 为**局部有限偏序集**.

局部有限偏序集：具体实例

例 17

正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 按照整除关系作成偏序集 $(\mathbb{Z}_+, |)$，记为 $\mathfrak{R}$，
即对于正整数 m 和 n，“$m \leqslant n$”意味着 $m|n$，或 m 为 n 的因子.
$\mathfrak{R}$ 是局部有限偏序集，记 $\mathfrak{R}$ 的区间 $[1, n]$ 为 $\mathfrak{R}(n)$.

例 18

集合 S 的所有子集的集合 2^S 称为幂集，其按照集合的包含关系作成偏序集 $(2^S, \subseteq)$，记为 $\mathfrak{R}(S)$.

当 S 是无限集时，$\mathfrak{R}(S)$ 不是局部有限偏序集. 若 $S = [n] = \{1, 2, \cdots, n\}$，则记 $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(n)$.

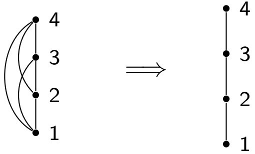
定义 4

对于偏序集 P 中的两个元 x 和 y, 若区间 $[x,y]$ 只有两个元素, 则称 y **覆盖** x.

对偏序集 $(P,\leqslant)$ 可用哈斯 (Hasse) 图来形象地表示, 即将 P 中的元用平面上的点来表示:

若 y 覆盖 x, 即 $x<y$ 并且没有 z 使得 $x<z<y$, 则将 y 置于点 x 的上面, 并用一条从 y 向下的直线段连到 x.

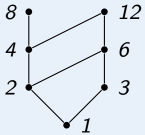
例如: 集合 $\{1,2,3,4\}$ 上的偏序集为 $\{(a,b)|\,a\leqslant b\}$, 其哈斯图如下面的右图所示.



注: 对于一个有限集上的偏序集所构成的哈斯图是去掉所有环和由于传递性出现的边, 再去掉有向边上的箭头, 并默认所有边的方向是向下的图.

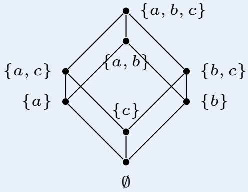
例 19

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 上的偏序集为 $P(A) = \{(a, b) | a$ 整除 $b\}$, 其 *Hasse* 图如图所示.



例 20

$S = \{a, b, c\}$, 幂集 $P(S)$ 上的偏序集为 $P(S) = \{(A, B) | \, A \subseteq B\}$, 其 *Hasse* 图如图所示.



定义 5

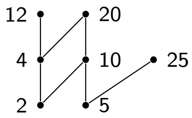
对 $x \in P$, 若不存在 $y \in P$, 使得 $x < y$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**极大元**.

对 $x \in P$, 若不存在 $y \in P$, 使得 $y < x$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**极小元**.

定义 5

对 $x \in P$, 若不存在 $y \in P$, 使得 $x < y$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**极大元**.
对 $x \in P$, 若不存在 $y \in P$, 使得 $y < x$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**极小元**.

例如, 在偏序集 $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ 中, 可以根据 Hasse 图得到其极大元与极小元, 如图可以看出: 12, 20, 25 是极大元, 2, 5 是极小元.



定义 6

对 $x \in P$, 若对所有的 $y \in P$ 有 $y \leqslant x$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**最大元**.

对 $x \in P$, 若对所有的 $y \in P$ 有 $x \leqslant y$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**最小元**.

定义 6

对 $x \in P$, 若对所有的 $y \in P$ 有 $y \leqslant x$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**最大元**.

对 $x \in P$, 若对所有的 $y \in P$ 有 $x \leqslant y$, 则称 x 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的**最小元**.

注: 在偏序集中最大、最小元不一定存在, 但若存在, 则唯一.

例如, 在下图中,

(a) (b) (c) (d)

(a) 的最小元为 a, 没有最大元; (b) 既没有最小元也没有最大元;

(c) 的最大元为 d, 没有最小元; (d) 的最大元为 d, 最小元为 a.

定义 7

设 S 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的一个子集, 对 $x \in P$:

(1) 若 $\forall a \in S$ 有 $a \leqslant x$, 则称 x 为 S 的一个上界;

(2) 若 $\forall a \in S$ 有 $x \leqslant a$, 则称 x 为 S 的一个下界.

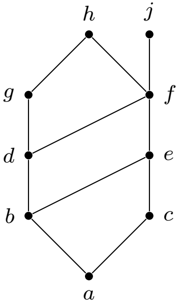
定义 7

设 S 为偏序集 $(P, \leqslant)$ 的一个子集, 对 $x \in P$:

(1) 若 $\forall a \in S$ 有 $a \leqslant x$, 则称 x 为 S 的一个**上界**;

(2) 若 $\forall a \in S$ 有 $x \leqslant a$, 则称 x 为 S 的一个**下界**.

例如, 在如下 Hasse 图中, $\{a, b, c\}$ 的上界为 e, f, j, h, 下界为 a; $\{j, h\}$ 没有上界, 下界为 a, b, c, d, e, f; $\{a, c, d, f\}$ 的上界为 f, h, j, 下界为 a.



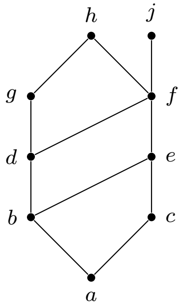
定义 8

- 若 x 是 S 的一个上界, 并且它小于 S 的任意其他上界, 则称 x 为子集 S 的最小上界, 即上确界, 记作 $\sup(S)$;
- 若 y 是 S 的一个下界, 并且它大于 S 的任意其他下界, 则称 y 为子集 S 的最大下界, 即下确界, 记作 $\inf(S)$.

定义 8

- 若 x 是 S 的一个上界，并且它小于 S 的任意其他上界，则称 x 为子集 S 的最小上界，即上确界，记作 $\sup(S)$；
- 若 y 是 S 的一个下界，并且它大于 S 的任意其他下界，则称 y 为子集 S 的最大下界，即下确界，记作 $\inf(S)$.

例如，下图中，由 $g < h$ 可知，$\{b, d, g\}$ 的上界是 g 和 h，上确界是 g；由 $a < b$ 可知，$\{b, d, g\}$ 的下界是 a 和 b，下确界是 b.



定义 9

若一个偏序集的每对元素都有上确界和下确界，则称这个偏序集为格.

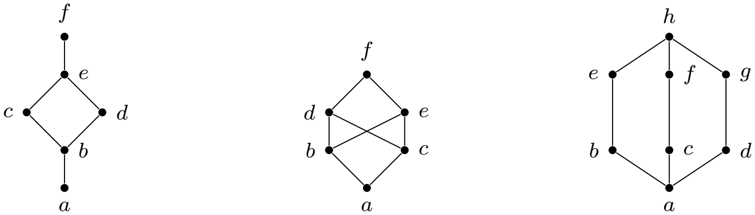
定义 9

若一个偏序集的每对元素都有上确界和下确界，则称这个偏序集为格.

例如，(1) 观察下中的 Hasse 图，(a) 和 (c) 是格，但 (b) 中由于 b 和 c 没有上确界，因此不是格.

(2) 对偏序集 $(\mathbb{Z}_+, |)$ 中的任意两个正整数 a 和 b，其上确界和下确界分别是它们的最小公倍数和最大公约数，所以，$(\mathbb{Z}_+, |)$ 是格.

(3) 对偏序集 $(2^S, \subseteq)$，由 S 的两个子集 A 和 B 的上确界和下确界分别是 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 可知，$(2^S, \subseteq)$ 是格.



(a) (b) (c)

偏序集上的关联代数

定义 10

设 P 是局部有限偏序集，令

$$I(P)=\{f|f\text{ 是}P\times P\text{ 上的双变量实值函数: 若}x\nleqslant y\text{, 则}f(x,y)=0\}.$$

在 $I(P)$ 上像通常一样定义函数的加法和数乘，而乘积 $h=fg$ 定义如下:

$$h(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)g(z,y).$$

称附加以上运算的 $I(P)$ 为**偏序集 P 上的关联代数**.

注: 由于 P 是局部有限的，上式右边的和式只有有限项，并且当 $x\nleqslant y$ 时，右边的和式按习惯表示零. 实际上，和式可以改写为 $\sum_z f(x,z)g(z,y)$.

易证 $I(P)$ 上定义的乘法满足结合律，并且上述定义的乘法、数乘和加法满足结合律和分配律.

关联代数中的特殊函数

(1) 克罗内克 (Kronecker) 函数 $\delta(x,y)$ 定义为

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

显然, 对任何 $f \in I(P)$, 恒有 $\delta \cdot f = f \cdot \delta = f$,

所以 δ 函数在关联代数中起着乘法单位元的作用, 因此也叫单位函数.

(2) 偏序集 P 上的 ζ 函数 $\zeta(x,y)$ 定义为

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ 0, & x \nleqslant y. \end{cases}$$

(3) 将 ζ 函数与 δ 函数的差定义为 η 函数: $\eta(x,y) = \zeta(x,y) - \delta(x,y)$, 称之为关联函数, 显然

$$\eta(x,y) = \begin{cases} 1, & x < y, \\ 0, & x \nless y. \end{cases}$$

对于 $f \in I(P)$,

- 若存在一个 $g_1 \in I(P)$, 使得 $f \cdot g_1 = \delta$, 则称 g_1 为 f 的右逆.
- 若存在一个 $g_2 \in I(P)$, 使得 $g_2 \cdot f = \delta$, 则称 g_2 为 f 的左逆.

偏序集上的默比乌斯函数

引理 11

设 P 为局部有限偏序集, $f \in I(P)$ 有右逆或左逆的充分必要条件是

$$\text{对任何 } x \in P \text{ 都有 } f(x,x) \neq 0.$$

当此条件满足时右逆等于左逆, 故以后可一律称之为逆, 记 f 的逆为 f^{-1}.

因为对任何 $x \in P$ 都有 $\zeta(x,x) = 1$, 所以 ζ 函数满足上述引理的条件, 从而一定有逆.

记 $\zeta(x,y)$ 的逆函数为 $\mu(x,y)$, 则

$$\mu\zeta = \zeta\mu = \delta.$$

我们称 $\mu(x,y)$ 为偏序集 P 上的默比乌斯函数.

偏序集上的默比乌斯函数

例 21

给定集合 S, 考虑偏序集 $(P_f(S), \subseteq)$. 证明: 其上的默比乌斯函数为 $\mu(A, B) = (-1)^{|B|-|A|}$, $A, B \in P_f(S)$ 且 $A \subseteq B$.

偏序集上的默比乌斯函数

例 21

给定集合 S，考虑偏序集 $(P_f(S),\subseteq)$. 证明：其上的默比乌斯函数为 $\mu(A,B)=(-1)^{|B|-|A|}$，$A,B\in P_f(S)$ 且 $A\subseteq B$.

证 对于 $A,B\in P_f(S)$ 且 $A\subseteq B$，设 $n=|B|-|A|$. 下面对 n 作归纳. 当 $n=0$ 时，$A=B$，故

$$\mu(A,B)=\mu(A,A)=1=(-1)^{|B|-|A|},$$

从而 $n=0$ 时结论成立. 假设对 $k\geqslant 0$，结论当 $n\leqslant k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}\mu(A,B)&=-\sum_{A\subseteq C\subsetneqq B}\mu(A,C)=-\sum_{A\subseteq C\subsetneqq B}(-1)^{|C|-|A|}\\&=-\sum_{i=0}^{|B|-|A|-1}\binom{|B|-|A|}{i}(-1)^i\\&=-\left((1-1)^{|B|-|A|}-(-1)^{|B|-|A|}\right)=(-1)^{|B|-|A|},\end{aligned}$$

即结论对 $n=k+1$ 成立. 由归纳原理知，结论对一切 n 成立.

例 22

考虑偏序集 $(\mathbb{Z}^+, |)$. 对任意 $x, y \in \mathbb{Z}^+$ 及 $x|y$, 将 $\frac{y}{x}$ 写成如下素数幂的形式:

$$\frac{y}{x} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}, \quad a_i \geqslant 1.$$

证明: $(\mathbb{Z}^+, |)$ 上的默比乌斯函数为

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ (-1)^r, & a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 1, r \geqslant 1, \\ 0, & \max\{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \geqslant 2 \text{ 或} x \nmid y. \end{cases}$$

证 对于正整数 $\frac{y}{x}$, 用归纳法证明命题. 当 $\frac{y}{x}=1$ 时, $\mu(x,y)=\mu(x,x)=1$, 从而命题对 $\frac{y}{x}=1$ 成立. 设 $k \geqslant 1$, $x|y$, 且命题对 $\frac{y}{x} \leqslant k$ 时成立, 则当 $\frac{y}{x}=\prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\mu(x,y) &= -\sum_{x|z|y,z\neq y}\mu(x,z) = -\sum_{x|z|y,z\neq y}\mu\left(\frac{z}{x}\right)\\ &= \mu\left(\frac{y}{x}\right)-\sum_{x|z|y}\mu\left(\frac{z}{x}\right) = \mu\left(\frac{y}{x}\right)-\sum_{t|\frac{y}{x}}\mu(t)\\ &= \mu\left(\frac{y}{x}\right),\end{aligned}$$

其中等式的最后一步运用了恒等式

$$\sum_{d|n}\mu(d)=0$$

对任意 $n>1$ 成立, 从而命题对 $\frac{y}{x}=k+1$ 成立. 由归纳原理知, 命题对一切正整数 $\frac{y}{x}$ 成立, 从而原命题成立.

偏序集上的默比乌斯反演公式

定理 12

设 $f(x)$ 是定义在局部有限偏序集 P 上的一个实值函数, 又设 P 中存在一个元素 p, 使得当 $x \not\geqslant p$ 时, 有 $f(x) = 0$. 若有

$$g(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y), \tag{2.8}$$

则可得

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} g(y)\mu(y, x). \tag{2.9}$$

反之, 也可由式 *(2.9)* 推出式 *(2.8)*.

反演公式的证明

证明 公式 (2.8) 右端的和式也可记作 $\sum_{p\leqslant y\leqslant x} f(y)$, 这个和式对局部有限偏序集来说只有有限项, 因此函数 $g(x)$ 是有意义的. 将式 (2.8) 的右端代入式 (2.9) 的右端, 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{y\leqslant x} g(y)\mu(y,x) &= \sum_{y\leqslant x}\left(\sum_{z\leqslant y} f(z)\right)\mu(y,x) \\
&= \sum_{z\leqslant x} f(z) \sum_{z\leqslant y\leqslant x} \mu(y,x) \\
&= \sum_{z\leqslant x} f(z) \sum_{z\leqslant y\leqslant x} \zeta(z,y)\mu(y,x) \\
&= \sum_{z\leqslant x} f(z)\delta(z,x) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

这表明, 由式 (2.8) 也可推出式 (2.9).

现假定式 (2.9) 成立，则

$$\begin{aligned}\sum_{y\leqslant x} f(y) &= \sum_{y\leqslant x} f(y)\zeta(y,x)\\ &= \sum_{y\leqslant x}\left(\sum_{z\leqslant y} g(z)\mu(z,y)\right)\zeta(y,x)\\ &= \sum_{z\leqslant x} g(z) \sum_{z\leqslant y\leqslant x} \mu(z,y)\,\zeta(y,x)\\ &= \sum_{z\leqslant x} g(z)\,\delta(z,x)\\ &= g(x).\end{aligned}$$

这就得到了式 (2.8).

容斥原理

事实上，容斥原理是上述默比乌斯反演公式的一个推论.

例如，设所考虑性质的集合为

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \cdots, P_m\}.$$

集合 S 中满足性质 P_i 的所有元素组成的集合记为 X_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$. 研究偏序集 $P = (P(\mathcal{P}), \subseteq)$. 其上的实值函数 F, G 分别定义如下：对任意 $A \subseteq \mathcal{P}$，$F(A)$ 为集合 S 中具有 $\overline{A}$ 中的所有性质但不具有 A 中的任何性质的元素个数；$G(A)$ 为集合 S 中具有 $\overline{A}$ 中的所有性质的元素个数. 易见，对任意 $A \subseteq \mathcal{P}$，有

$$G(A) = \sum_{B \subseteq A} F(B),$$

故有

$$F(A) = \sum_{B \subseteq A} \mu(B, A) G(B) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} G(B).$$

容斥原理

特别地, 不具有 $\mathcal{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\}$ 中任何一种性质的元素个数由下式给出:

$$F(\mathcal{P})=\sum_{B\subseteq\mathcal{P}}(-1)^{|\mathcal{P}|-|B|}G(B)=\sum_{A\subseteq\mathcal{P}}(-1)^{|A|}H(A),$$

其中最后一步是作变换 $A=\overline{B}=\mathcal{P}\setminus B$ 及令

$$H(A)=|\{x\mid x\in S,x\text{ 具有}A\text{ 中的所有性质}\}|$$

(注意对任意 $B\subseteq\mathcal{P}$, $H(\overline{B})=G(B)$).

由上可见, 偏序集上的默比乌斯反演是容斥原理的延伸.