组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

二项式定理中的系数都是组合数，组合数和二项式定理有密切的关系.

本章我们就详细讨论这种关系.

回忆：表达式 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k 元子集的个数.

对于非负整数 n 和 k，我们已经证明了

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

由此不难得到

- 对称性：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 恒等式：$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

它还具有许多很奇妙的性质，关于它也有着许多恒等式.

第二章 组合恒等式

二项式系数

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pascal 公式给出了二项式系数的递推关系.

定理 1.1 (Pascal 公式)

对于满足 $1 \le k \le n-1$ 的所有整数 k 和 n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

利用边值条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 和 Pascal 公式可以得到下面的表格:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

证明: 直接将 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ 代入上式验证等式成立.

17 世纪, 法国数学家 Pascal 做出了下面的三角形.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

图: Blaise Pascal

布莱士 · 帕斯卡 (Blaise Pascal,1623-1662), 法国数学家、物理学家、思想家. 帕斯卡在 12 岁时开始自己研究几何, 发现 “三角形的内角和等于 180” . 在研究二项式系数时, 写成著名论文《算术三角形》向巴黎科学院提交. 其中给出的二项式系数展开后人称为 “帕斯卡三角形” , 帕斯卡关于二项式系数的工作导致牛顿发现了分数和负幂的一般二项式定理.

贾宪三角（杨辉三角 / Pascal’s Triangle）

这一形似三角的数字阵列，在中国被称为“贾宪三角”或“杨辉三角”，其历史远早于欧洲的记录.

- 北宋数学家贾宪（约 11 世纪）在其著作《释锁算术》（已佚）中已对此进行了研究，并给出了构造方法. 其成果被收录于《永乐大典》卷 16344 中，至今仍藏于大英博物馆.
- 南宋数学家杨辉（约 1238–1298）在《详解九章算法》（1261 年）中引用了贾宪的方法，并称之为“开方作法本源图”，使得这一成果得以广泛流传. 因此，后世也称其为“杨辉三角”.
- 图示同样见于元代数学家朱世杰的《四元玉鉴》（1303 年），标题为“古法七乘方图”，清晰表明此图传承已久.

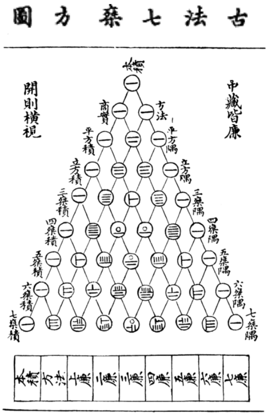


图: 朱世杰《四元玉鉴》

$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ 的组合证明 — 集合的组合

- 令 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,
  考虑它的 k 元子集的个数
- 将 S 的 k 元子集分成两类:

$$A = \{\text{不含元 } n \text{ 的 } k \text{ 元子集}\}$$
$$B = \{\text{包含元 } n \text{ 的 } k \text{ 元子集}\}$$

- 按加法原理, $\binom{n}{k}=|A|+|B|$.
- A 中的 k 元子集恰好是集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 的 k 元子集, 故 $|A|=\binom{n-1}{k}$
- B 的 k 元子集已包含 n, 只需从集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中再选出 $k-1$ 个元素即可, 故 $|B|=\binom{n-1}{k-1}$.

例 $n=5$, $k=3$, $\binom{n}{k}=10$

- A 的 3 元子集

$$\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},$$
$$\{1,3,4\},\ \{2,3,4\},$$

  对应集合 $\{1,2,3,4\}$ 的 3 元子集.
- B 的 3 元子集

$$\{1,2,5\},\ \{1,3,5\},\ \{1,4,5\},$$
$$\{2,3,5\},\ \{2,4,5\},\ \{3,4,5\},$$

  去掉元素 $n=5$ 后, 得

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},$$
$$\{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\},$$

  恰好是集合 $\{1,2,3,4\}$ 的 2 元子集.

组合证明：多重集合排列

考虑多重集合

$$M = \{1^k, 2^{n-k}\},$$

其所有不同排列的个数为

$$|\mathrm{Perm}(M)| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

在排列集合 $\mathrm{Perm}(M)$ 上，按最后一个元素分类：

- 若最后一个是 2，前 $n-1$ 位来自 $M_1 = \{1^k, 2^{n-k-1}\}$，　$|\mathrm{Perm}(M_1)| = \binom{n-1}{k}$；
- 若最后一个是 1，前 $n-1$ 位来自 $M_2 = \{1^{k-1}, 2^{n-k}\}$，　$|\mathrm{Perm}(M_2)| = \binom{n-1}{k-1}$.

因此

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

组合证明：格路计数

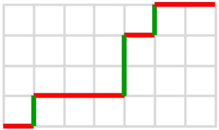
- 令 n 是非负整数，且 $1 \leq k \leq n-1$.
- 回忆 $\binom{n}{k}$ 表示从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的格路的个数，其中每条格路包含 n 步，每一步只有两种选择：

$$\text{水平向右 } (1,0) \rightarrow \qquad \text{水平向上 } (0,1) \uparrow$$

- 考虑从点 $(0,0)$ 到点 $(k, n-k)$ 的格路，有两种选择

  $i)$ 从点 (0,0) 到点 $(k, n-k-1)$，再水平向上移至 $(k, n-k)$；

  $ii)$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(k-1, n-k)$，再水平向右移至 $(k, n-k)$；
- 由加法原理，得 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.



图：格路

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增, 再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$, 如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$, 使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数, 整数 t 不唯一. 例如: $1, 3, 3, 1$.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的, 且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

单峰性 (unimodality)

- 观察发现任意一行的数字先单调递增，再单调递减.

定义 1.2

对于序列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$，如果存在一个整数 t $(0 \le t \le n)$，使得 $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_t \ge s_{t+1} \ge \cdots \ge s_n$ 那么称该序列是单峰的.

- s_t 为该序列的最大数，整数 t 不唯一. 例如：$1, 3, 3, 1$.

定理 1.3

序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 是单峰的，且最大值是 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

提示：只需对 $0 \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ 证明 $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

一般地，可以得到

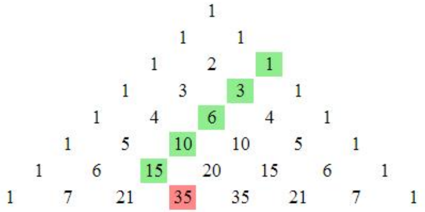
朱世杰恒等式

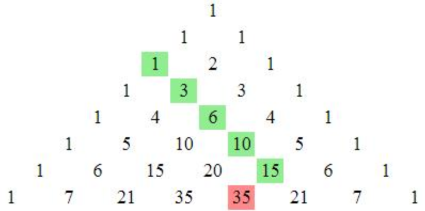
设 n,k 是两个正整数. 若 $n>k$，则

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$





朱世杰恒等式

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}=\binom{n+k+1}{k}$$

例 1.1

利用

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

例 1.1

利用
$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$
计算 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的值.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \sum_{m=1}^{n} m^2 = 2\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

例 1.2

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

例 1.2

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

将 $m = 1, 2, 3$ 分别代入 (*) 式得

$$1 = c$$

$$8 = b + 2c$$

$$27 = a + 3b + 3c$$

解方程组得 $a = 6, b = 6, c = 1$.

例

求整数 a, b, c 使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1} \tag{*}$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值.

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

因此,

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \sum_{m=1}^{n} m^3 = 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{m=1}^{n}\binom{m}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

清代数学家李善兰（1811–1882）在其杰作《垛积比类》（1859 年）中，对高阶等差级数求和问题（即“垛积问题”）进行了开创性的研究.

书中第二卷《乘方垛》探讨了自然数幂和 $S_p(n)=\sum_{i=1}^{n} i^p$ 的求法. 为此，李善兰创造性地将 m^p 表示为二项式系数（即“垛积数”）的线性组合：

$$m^p=\sum_{k=1}^{p} A(p,k)\binom{m+p-k}{p},\quad (m\in\mathbb{Z}^+)$$

其中系数 $A(p,k)$ 与 m 无关，后世称之为“李善兰数”或“李善兰系数”.

而在第三卷《三角自乘垛》中，李善兰提出并证明了下述更为复杂的组合恒等式，这便是驰名中外的“李善兰恒等式”：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2\binom{n+2m-k}{2m}=\binom{m+n}{n}^2$$

此恒等式被一些学者（如 George Andrews）誉为“中国恒等式”(Chinese Identity).

数学家华罗庚也曾为此式给出了一个经典的数学归纳法证明.

二项式系数

1. Pascal 公式
2. 二项式定理
3. 多项式定理
4. 组合恒等式
5. 高斯系数

二项式定理

定理 2.1

令 n 是一个正整数，对所有的 x 和 y，有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- 证明一：乘法分配律展开，再合并同类项.
  将 $(x+y)^n$ 写作
  $$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)}_{n},$$
  我们发现对于 $x^{n-k}y^k$ 一项，一定有 n 项乘积中的 $n-k$ 项贡献了 x，其余 k 项贡献了 y. 因此 $x^{n-k}y^k$ 项系数为 $\binom{n}{k}$.
- 证明二：归纳法.

二项式定理

证明三：泰勒级数展开.

e^x 的泰勒级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots .$$

因为 $e^{x+y} = e^x e^y$，相同函数的幂级数逐项相等，于是在 $x+y$ 处的级数等于在 x 处的级数和在 y 处的级数的卷积，即

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!},$$

化简得

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

等价形式

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{k} y^{n-k}$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$

特殊地，令 $y=1$，得

推论 2.2

令 n 是一个正整数，对所有的 x，有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k.$$

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^4$.

例 2.2

$(3x-2y)^9$ 的展开式中，x^2y^7 的系数是什么？x^7y^2 的系数是什么？

例 2.1

用二项式定理展开 $(2x-y)^4$.

$$(2x-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4.$$

例 2.2

$(3x-2y)^9$ 的展开式中, x^2y^7 的系数是什么？x^7y^2 的系数是什么？

$$(3x-2y)^9 = \sum_{r=0}^{9} \binom{9}{r} (3x)^r (-2y)^{9-r}$$

x^2y^7 系数: $\binom{9}{2} 3^2 (-2)^7 = -41472$

x^7y^2 系数: $\binom{9}{7} 3^7 (-2)^2 = 314928$

牛顿二项式定理

定义 2.3

设 α 是实数,k 是非负整数, 定义二项式系数为

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

定理 2.4

设 α 是实数, 对 $|z| < 1$ 的 z, 有

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

常用展开式

- $\alpha = -n$, 其中 n 为正整数

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

α 取负整数时

- $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1+z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$
- $(1+z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) z^k$

令 $-z$ 代替上面的 z

- $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$
- $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$
- $(1-z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$

推论 2.5

$(1-z)^{-n}$ 中 z^k 的系数等于 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ 的非负整数解，即 $\binom{n+k-1}{k}$.

$$(1-z)^{-n} = (1-z)^{-1} \cdots (1-z)^{-1} = (1+z+z^2+\cdots)\cdots(1+z+z^2+\cdots)$$

从第一个因子选取 z^{k_1}，从第二个因子选取 $z^{k_2}, \cdots$

常用展开式

- $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!\cdot(2k-2)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k-2)!!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k!\cdot(k-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}\end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\cdot k}\binom{2k-2}{k-1}z^k$$

回顾——重集的排列数

定理 3.1

令 S 是一个有 t 个不同类型的元的多重集，各个元的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_t$，满足 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$，则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

定义 3.2

多项式系数定义为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

这里 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$.

多项式定理

定理 3.3

对于 t 个不同的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_t=n,\\ n_1,n_2,\cdots,n_t\geqslant 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$$

- 证明：利用乘法的分配律将乘积完全展开，
  再考虑合并同类项，$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$ 有 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 种排列.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中，$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少？

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

多项式定理

例 3.1

展开式 $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 中，$x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少？

$$\binom{6}{3,1,2} 2^3(-3)^1 5^2 = -36000$$

例 3.2

确定 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 项的系数.

$$\binom{10}{3,1,4,2} = \frac{10!}{3!1!4!2!} = 12600$$

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中，共有多少不同的项？

例 3.3

展开式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ 中，共有多少不同的项？

展开式中，一般项为 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_t^{n_t}$，满足

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$$

因此不同的项的数目等同于上述方程的非负整数解的个数，即 $\binom{n+t-1}{n}$.

二项式系数

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

组合恒等式

恒等式 1

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

- 对应着二项式定理中：$x = 1, y = 1$；
- 如果 S 是 n 个元素的集合，则 S 的所有组合有多少个？

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

恒等式 2

设 $n \geq 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

- 对应着二项式定理中： $x = 1, y = -1$
- S 的具有偶数个元素的组合有多少个？具有奇数个元素的组合有多少个？
- 可否建立奇组合与偶组合之间的一一对应？

推论

设 $n \geq 1$，则

$$\sum_{k\text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = \sum_{k\text{ 为偶数}} \binom{n}{k}$$

证明 设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$，则

$$A = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为偶数且} 1 \in S\},$$
$$B = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为奇数且} 1 \in S\},$$
$$C = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为偶数且} 1 \notin S\},$$
$$D = \{S \subseteq X : |S| \text{ 为奇数且} 1 \notin S\}.$$

构造映射 $f : A \to D$ 为 $f(S) = S \setminus \{1\}$，显然 f 为双射. 所以 $|A| = |D|$.

类似地 $|B| = |C|$.

因此，

$$\sum_{k\text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = |B| + |D| = |C| + |A| = \sum_{k\text{ 为偶数}} \binom{n}{k}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

恒等式 3

对于正整数 n, k,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

- 考虑从 n 人中选出带队长的 k 人小队:
- 可先从 n 人中选出 k 人做队员, 再从 k 人中选出一人做队长;
- 也可以从 n 人中选出一人做队长, 然后再从 $n-1$ 人中选出 $k-1$ 人做队员.

例 4.1

利用 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 计算

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

例 4.1

利用 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 计算

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

1. $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1}.$$
2. $$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$
3. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

恒等式 4

对于正整数 n

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

方法 1：对 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ 两边同时求导得

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1},$$

再令 $x=1$.

方法 2：应用等式 3

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}.$$

方法 3：从 n 个人中挑选 k $(k=1,2,\cdots,n)$ 个人组成一个队，并选择一人为队长，有多少种方法？

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

证明 对 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 求导, 得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

将上式左右两边同乘 x, 得

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k}.$$

对上式左右两边求导, 得

$$n\left((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n\left(2^{n-1} + (n-1)2^{n-2}\right) = n(n+1)2^{n-2}.$$

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级, 并选择班长、团支书各一人 (可兼任), 有多少种方法 ?

恒等式 5

对于整数 $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

- 从 n 个人中挑选 k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个人组成一个班级，并选择班长、团支书各一人 (可兼任)，有多少种方法？
- $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

恒等式 6

证明等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

证明 对

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

两边对 x 求从 0 到 1 的定积分,

$$\int_0^1 (1+x)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_0^1,$$

$$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

此即所证等式.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

朱世杰恒等式

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

一些英文教材上常称这个恒等式为 Hockey-stick identity.

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

恒等式 7 (朱世杰恒等式)

设 n, k 是两个正整数. 若 $n > k$, 则

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

归纳法证明: 关于 n 做归纳.

组合证明:

- 从 $n+1$ 个人中挑选 $k+1$ 个人组成一个队.
- 先从 $n+1$ 个人当中挑出一个人, 令他的号码是 $i+1$ $(i = k, \cdots, n)$, 作为小队当中号码最大的人.
- 接下来只要从前 i 个人当中挑出剩下的 k 个人即可.

比较系数法: 提取

$$\sum_{i=0}^{n} (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$$

两边 x^k 的系数.

朱世杰恒等式

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

利用

$$\binom{i}{k} = \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1}$$

可知

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \left(\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \sum_{i=k+1}^{n+1} \binom{i}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1} \\
&= \binom{n+1}{k+1} - \underbrace{\binom{k}{k+1}}_{0} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

定义

对于 $f(i)$, 如果存在它的**差分** $F(i)$ 满足

$$\Delta_i F(i) = F(i+1) - F(i) = f(i),$$

则称 $F(i)$ 是 $f(i)$ 的**不定和**.

于是

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a}^{b} F(i+1) - \sum_{i=a}^{b} F(i) = F(b+1) - F(a).$$

- 多项式总是可求和的

$$\binom{i}{k} = \Delta_i \binom{i}{k+1} = \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1}.$$

Gosper 算法

输入：超几何项 $f(i)$，也就是 $f(i+1)/f(i)$ 是有理函数.

输出：

- $F(i)$ 使得 $\Delta_i F(i) = F(i+1) - F(i) = f(i)$;
- 算法失败，若满足条件的超几何项 $g(i)$ 不存在.

Gosper 算法适用于求下面的不定和

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{2i}{i}^2}{(i+1)4^{2i}} = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i \frac{4i\binom{2i}{i}^2}{4^{2i}} = \frac{(n+1)\binom{2n+2}{n+1}^2}{4^{2n+1}}.$$

不定和没有好的表达式, 定和可能有好的表达式.

例如 $\binom{n}{i}$ 关于 i 的不定和不是超几何的, 但是

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

处理定和问题的基本方法是

构造和式满足的多项式系数的递推关系.

恒等式 8 (范德蒙恒等式)

若 m, n 是正整数, k 是非负整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

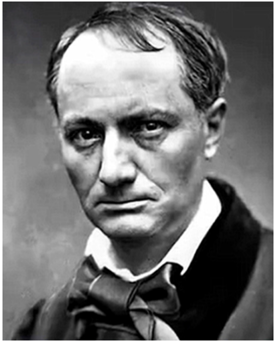


图: A. T. Vandermonde

范德蒙德（A. T. Vandermonde），法国数学家, 巴黎科学院院士.
他在 1770 年至 1772 年间提交给巴黎科学院的 4 篇论文对代数和组合做出了卓越的贡献.
在第三篇论文中, 他研究了组合思想, 在文中定义了上阶乘和下阶乘的符号, 并证明一些组合恒等式.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数，k 是非负整数，则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数, k 是非负整数, 则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

方法 1: 比较等式 $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n$ 两边 x^k 的系数.

方法 2:

- $\binom{m+n}{k}$ 是 $(m+n)$ 元集合 $A \cup B$ 中 k-子集的个数, 其中 $A = \{1, \ldots, m\}, B = \{m+1, \ldots, m+n\}$,
- 而其中包含 A 中 i 个元素的这样的 k-子集的个数为 $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$,
- 所以和式 $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 便是对所有的 i 来计这些子集的个数.

范德蒙恒等式

若 m,n 是正整数，k 是非负整数，则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

特别地，当 $m=n=k$ 时，

推论

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}.$$

方法 3：机器证明.

20 世纪 90 年代, Zeilberger 提出了一种证明组合恒等式 (更一般的 “超几何恒等式”) 的机械化算法.

他认识到问题的实质是：为证明恒等式

$$\sum_k f(n,k) = g(n),$$

只需：

- 找出一个左边和式 $F(n) = \sum_k f(n,k)$ 满足的递推关系；
- 用代入的方法验证右边 $g(n)$ 也满足同样的递推关系；
- 用足够多的初始值验证等式两边相等.

因此寻找和式的递推关系就成了证明和发现恒等式的首要任务.

例如

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zeilberger 算法

输入：双超几何项 $f(n,i)$，即 $f(n+1,i)/f(n,i)$ 以及 $f(n,i+1)/f(n,i)$ 均为关于 n 和 i 的有理函数.

输出：

- 邻差算子

  $$L = \sum_{j=0}^{d} a_j(n)(S_n)^j,$$

  其中 $S_n f(n,i) = f(n+1,i)$

- 超几何项 $g(n,i)$ 使得

  $$L(f) = \Delta_i g(n,i) = g(n,i+1) - g(n,i).$$

  于是,

  $$a_0(n)f(n,i) + a_1(n)f(n+1,i) + \cdots + a_d(n)f(n+d,i) = g(n,i+1) - g(n,i).$$

若邻差算子 L 不存在，则算法失效.

Zeilberger 算法证明组合恒等式

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数，则

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

令 $f(n,i) = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 及 $F(n) = \sum_{i=0}^{k} f(n,i)$，Zeilberger 算法可以找到

$$L = (m+n-k+1)S_n - (m+n+1), \quad g(n,i) = i\binom{m}{i}\binom{n}{k-i},$$

即

$$(m+n-k+1)f(n+1,i) - (m+n+1)f(n,i) = g(n,i+1) - g(n,i).$$

对 i 从 0 到 k 求和可得

$$(m+n-k+1)F(n+1) - (m+n+1)F(n) = g(n,k+1) - g(n,0) = 0.$$

最后需要验证 $\binom{m+n}{k}$ 满足与 $F(n)$ 有相同的初值和递推关系.

Zeilberger 算法证明组合恒等式

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数，则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}.$$

等号左边 $F(n)=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ 的**初值**为 $F(0)=\binom{m}{k}$，**递推关系**为

$$(m+n-k+1)F(n+1)=(m+n+1)F(n).$$

等号右边 $\binom{m+n}{k}$ 的**初值**为 $\binom{m+0}{k}=\binom{m}{k}$，**递推关系**为

$$(m+n-k+1)\binom{m+n+1}{k}=(m+n+1)\binom{m+n}{k}.$$

因此，$F(n)$ 与 $\binom{m+n}{k}$ 具有相同的初值和递推关系.

范德蒙恒等式

若 m, n 是正整数，则

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

Mathematica 代码实现：

In[1]:= $<< \boldsymbol{RISC`fastZeil`}$

Fast Zeilberger Package version 3.61

written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese

Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),

Johannes Kepler University, Linz, Austria

In[2]:= $\boldsymbol{Zb[Binomial[m, i]Binomial[n, k-i], \{i, 0, k\}, n, 1]}$

If ‘k’ is a natural number, then:

Out[2]= $\{(m+n+1)\mathsf{SUM}[n] == (1-k+m+n)\mathsf{SUM}[1+n]\}$

例 4.2 (李善兰恒等式)

证明下列恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2$$

李善兰恒等式为组合数学中的一个著名恒等式，由中国清代数学家李善兰于 1859 年在《垛积比类》一书中首次提出，因此得名.

李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

令 $f(n,j) = \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k}$ 及 $F(n) = \sum_{j=0}^{k} f(n,j)$, Zeilberger 算法可以找到

$$L = (n+1)^2 S_n - (k+n+1)^2, \quad g(n,j) = \frac{j^2(-j+2k+n+1)}{-j+n+1} f(n,j).$$

即

$$(n+1)^2 f(n+1,j) - (k+n+1)^2 f(n,j) = g(n,j+1) - g(n,j).$$

对 j 从 0 到 k 求和可得

$$(n+1)^2 F(n+1) - (k+n+1)^2 F(n) = g(n,k+1) - g(n,0) = 0.$$

最后验证 $\binom{n+k}{k}^2$ 满足与 $F(n)$ 有相同的初值和递推关系.

李善兰恒等式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2$$

Mathematica 代码实现:

In[3]:= $<< \boldsymbol{RISC`fastZeil`}$

Fast Zeilberger Package version 3.61

written by Peter Paule, Markus Schorn, and Axel Riese

Copyright Research Institute for Symbolic Computation (RISC),

Johannes Kepler University, Linz, Austria

In[4]:= $\boldsymbol{Zb[Binomial[k,j]^2 Binomial[n+2k-j,2k],\{j,0,k\},n,1]}$

If ‘k’ is a natural number, then:

Out[4]= $\{(k+n+1)^2 \mathsf{SUM}[n] == (n+1)^2 \mathsf{SUM}[1+n]\}$

例 4.3

设 n 和 k 均为正整数，给出下面式子的一个组合证明

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

例 4.4

设 n 是正整数，证明

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ (-1)^m \binom{2m}{m}, & n = 2m \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

提示：考虑 $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数.

例 4.5

设 n 是正整数，证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

例 4.6

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m \binom{n}{m}$.

例 4.6

证明

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = 0$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = 2^m\binom{n}{m}$.

1. $$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{j!(k-j)!} = \frac{n}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$
2. $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m}{k} = \binom{n}{m}0 = 0$$
3. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k} = \sum\nolimits_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m}$$

二项式系数

- q-二项式系数，又称高斯系数（Gaussian coefficients），是组合数学中对二项式系数的一种推广.
- 它之所以称为“高斯系数”，是因为最早由德国数学家高斯在研究有限域上的多项式与二项式展开时对这些系数进行了系统研究.
- 高斯系数本质上是一种 q-化的二项式系数，其定义如下：

定义 5.1

设 n 和 k 为非负整数，且 $0 \leq k \leq n$. 定义

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}$$

为高斯系数.

- 例如，当 $n = 4$, $k = 2$ 时，

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^4 - 1)(q^4 - 1)}{(q^2 - 1)(q^2 - q)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

高斯系数的另一种表示

- 通常假定 $|q| < 1$. 定义
$$[n]! = [1][2]\cdots[n], \quad \text{其中} [n] = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$
则高斯系数可以表示为
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$
- 高斯系数是二项式系数的 q-模拟. 由定义可知
$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$
因此，高斯系数也称为 q-二项式系数.

高斯系数的性质

性质

高斯系数具有如下基本性质:

1. $$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1.$$
2. $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q.$$
3. $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$
4. $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Cauchy 二项式定理

$$\prod_{k=1}^{n}(1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

- $q \to 1$ 时，$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

高斯系数的组合解释 1 —多重集合上的排列

逆序数的定义

给定多重集合排列 $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$:

- 若 $i < j$ 且 $\pi_i > \pi_j$，则 (i, j) 称为排列 π 的一个**逆序**（inversion）.
- 排列中所有逆序的个数称为**逆序数**，记作 $\operatorname{inv}(\pi)$.

- 逆序数反映排列中元素“错位”的程度.
  逆序数越大，排列越“杂乱”;
  逆序数为 0 时，排列是单调非减的.

例子: $n = 4, k = 2$

多重集合 $\{1, 1, 2, 2\}$ 的全排列及逆序数:

π	$\operatorname{inv}(\pi)$
1122	0
1212	1
1221	2
2112	2
2121	3
2211	4

因此,

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

定理

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}(\pi)},$$

其中 $S(1^k 2^{n-k})$ 是由多重集合 $\{1^k, 2^{n-k}\}$ 的全排列构成的集合.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=1$ 时，性质显然成立. 假设对 $n-1$ 成立.

考虑 n 的情况. 对于 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in S(1^k 2^{n-k})$，分两种情况讨论:

- 若 $\pi_n = 2$，去掉 π_n 后，排列的逆序数不发生变化，并且
$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in S(1^k 2^{n-k-1}).$$
- 若 $\pi_n = 1$，排列中每个 2 对 π_n 产生一个逆序数，因此去掉 π_n 后逆序数减少 $n-k$ 个，且
$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in S(1^{k-1} 2^{n-k}).$$

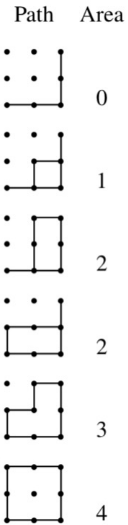
因此

$$\sum_{\pi \in S(1^k 2^{n-k})} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

高斯系数的组合解释 2 —格路

- 我们考虑从原点 $(0,0)$ 到点 (m,n) 的格路，其中 m,n 为非负整数，且每步仅允许向东或向北. 共需走 $m+n$ 步，其中 m 步向东、n 步向北，因此这样的路径共有 $\binom{m+n}{m}$ 条.
- 对于每条路径 p，路径与 x 轴及直线 $x=m$ 形成一个确定的封闭区域 $A(p)$. 右图展示了 $m=n=2$ 时六条路径及对应封闭区域.
- 若以变量 q 构造生成函数，即一条面积为 A 的路径贡献 q^A，则可得

$$1+q+2q^2+q^3+q^4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q.$$



设 $\mathscr{P}(m,n)$ 为从 $(0,0)$ 出发，每步沿 x 或 y 正方向走一单位，最终到达 (m,n) 的格路集合.

对 $p\in\mathscr{P}(m,n)$，设 $A(p)$ 为路径 p 与 x 轴及直线 $x=m$ 所围的面积.

定理

$$\sum_{p\in\mathscr{P}(k,n-k)} q^{A(p)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

证明 记左边为 $F(n,k)$. 则 $F(n,0)=F(n,n)=1$. 考虑 $p\in\mathscr{P}(k,n-k)$ 的最后一步:

- 若最后一步向北，则该路径对应一条从 $(0,0)$ 到 $(k,n-k-1)$ 的格路，最后一步不改变面积.
- 若最后一步向东，则对应从 $(0,0)$ 到 $(k-1,n-k)$ 的格路，最后一步会使面积增加 $n-k$.

因此，

$$F(n,k)=F(n-1,k)+q^{n-k}F(n-1,k-1),$$

而 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 也满足相同的初值条件与递推关系，故定理成立.

高斯系数的组合解释 3 — 有限域上的线性空间

先给出有限域上的线性空间的一些概念. 设 $\mathbb{F}_q$ 为有限域, 其中 $q = p^r$, 且 p 为素数.

- 对正整数 n, 我们定义 $V_n(q)$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的有序 n 元组

  $$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{F}_q, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

  组成的集合, 并满足线性运算

  $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
  $$c\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n), \quad c \in \mathbb{F}_q,$$

  则 $V_n(q)$ 构成 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间, 其中的元素称为向量.

- 若向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 满足

  $$\sum_{i=1}^{m} c_i X_i = 0,\ c_i \in \mathbb{F}_q \Rightarrow c_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

  则称向量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是线性无关的.

- 线性空间 $V_n(q)$ 中线性无关的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成 $V_n(q)$ 的一组基.
- $V_n(q)$ 中的任意向量都可以由 $V_n(q)$ 的一组基线性表示，即对任意向量 $X \in V_n(q)$，存在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i.$$

用坐标表示为

$$X = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

例子：$V_3(2)$

取有限域 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$，则

$$V_3(2) = \mathbb{F}_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0, 1\}\},$$

共有 $2^3 = 8$ 个向量.

例子：$V_3(2)$

取有限域 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$，则

$$V_3(2) = \mathbb{F}_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0,1\}\},$$

共有 $2^3 = 8$ 个向量.

1 维子空间的个数

非零向量共有 $2^3 - 1 = 7$ 个，且在 $\mathbb{F}_2$ 中只有标量 1，故不同非零向量生成不同的子空间：

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7.$$

例子：$V_3(2)$

取有限域 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$，则

$$V_3(2) = \mathbb{F}_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0, 1\}\},$$

共有 $2^3 = 8$ 个向量.

1 维子空间的个数

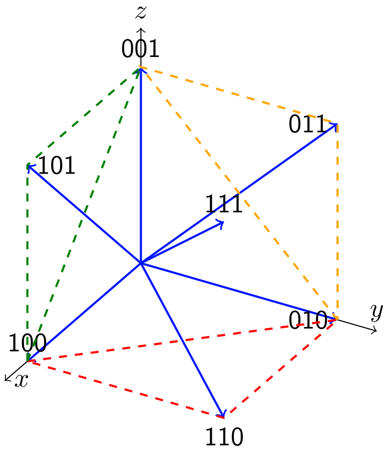
非零向量共有 $2^3 - 1 = 7$ 个，且在 $\mathbb{F}_2$ 中只有标量 1，故不同非零向量生成不同的子空间：

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7.$$

2 维子空间的个数

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_2 = \frac{(2^3 - 1)(2^2 - 1)}{(2^2 - 1)(2 - 1)} = \frac{7 \times 3}{3 \times 1} = 7.$$

可视化：$V_3(2)$ 的 2 维子空间



每个 2 维子空间包含 3 个非零向量和零向量

7 个 2 维子空间及非零向量

子空间	非零向量
W_1	100, 010, 110
W_2	100, 001, 101
W_3	010, 001, 011
W_4	100, 011, 111
W_5	010, 101, 111
W_6	001, 110, 111
W_7	110, 101, 011

举例：$V_3(2)$ 中的 2 维子空间

我们来计算 $V_3(2)$ 空间中的 $k = 2$ 维子空间（平面）的个数.

- $n = 3$, $k = 2$, $q = 2$
- 空间 $V_3(2)$ 有 $2^3 = 8$ 个向量.
- 我们在找的 2 维子空间，每个有 $2^2 = 4$ 个向量.

举例：$V_3(2)$ 中的 2 维子空间

我们来计算 $V_3(2)$ 空间中的 $k=2$ 维子空间（平面）的个数.

- $n=3$, $k=2$, $q=2$
- 空间 $V_3(2)$ 有 $2^3=8$ 个向量.
- 我们在找的 2 维子空间，每个有 $2^2=4$ 个向量.

应用公式：

$$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_2 = \frac{(2^3-1)(2^3-2)}{(2^2-1)(2^2-2)}$$

$$= \frac{(8-1)(8-2)}{(4-1)(4-2)}$$

$$= \frac{7\times 6}{3\times 2} = \frac{42}{6} = \mathbf{7}$$

所以，在 $V_3(2)$ 空间中，总共有 7 个 2 维子空间（平面）.

在 $V_3(2)$ 中:

子空间维数	个数
0	1
1	7
2	7
3	1

在 $V_3(2)$ 中:

子空间维数	个数
0	1
1	7
2	7
3	1

$$1+7+7+1=16$$

在 $V_3(2)$ 中:

子空间维数	个数
0	1
1	7
2	7
3	1

$$1+7+7+1=16$$

说明

数目分布 $1,7,7,1$ **由** q-**二项式定理给出**:

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1+q^it)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}}t^k,$$

它是 $(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$ **的** q-**类比**.

定理

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间 $V_n(q)$ 的所有 k 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

我们将使用“双重计数”(Double Counting) 的方法.

1. 首先，我们计算 $V_n(q)$ 中所有 **有序的** k 个线性无关向量组 $(v_1, \ldots, v_k)$ 的总数.
2. 然后，我们计算 **任意一个** k 维子空间 W 内部，有多少组不同的 **有序基** $(w_1, \ldots, w_k)$.
3. 最后，将 (1) 的总数除以 (2) 的基的个数，即得到 k 维子空间的总数.

第一步：计算 $V_n(q)$ 中的有序无关组

$V_n(q)$ 共有 q^n 个向量.

我们按顺序挑选 k 个线性无关的向量：

- v_1 不能是零向量 $\mathbf{0}$. $\implies$ (q^n-1) 种选择.
- v_2 不能在 1 维子空间 $\mathrm{span}(v_1)$ 中 (该空间有 q 个向量). $\implies$ (q^n-q) 种选择.
- v_3 不能在 2 维子空间 $\mathrm{span}(v_1,v_2)$ 中 (该空间有 q^2 个向量). $\implies$ (q^n-q^2) 种选择.
- $\dots\dots$
- v_k 不能在 $\mathrm{span}(v_1,\dots,v_{k-1})$ 中 (该空间有 q^{k-1} 个向量). $\implies$ (q^n-q^{k-1}) 种选择.

总数 N

$V_n(q)$ 中 k 个有序线性无关向量组的总数为：

$$N=(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{k-1})$$

第二步：计算单个子空间的有序基

现在，假设我们已经有 **一个** k 维子空间 W.

- W 本身同构于 $V_k(q)$，它有 q^k 个向量.
- 我们在 W **内部**寻找它有多少组不同的有序基 $(w_1, \ldots, w_k)$.

使用与第一步完全相同的逻辑，只是把 n 换成 k：

- $w_1 \neq \mathbf{0} \implies (q^k - 1)$ 种选择.
- $w_2 \notin \mathrm{span}(w_1) \implies (q^k - q)$ 种选择.
- ……
- $w_k \notin \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_{k-1}) \implies (q^k - q^{k-1})$ 种选择.

第二步：计算单个子空间的有序基

现在，假设我们已经有 **一个** k 维子空间 W.

- W 本身同构于 $V_k(q)$，它有 q^k 个向量.
- 我们在 W **内部**寻找它有多少组不同的有序基 $(w_1, \ldots, w_k)$.

使用与第一步完全相同的逻辑，只是把 n 换成 k：

- $w_1 \neq \mathbf{0} \implies (q^k - 1)$ 种选择.
- $w_2 \notin \operatorname{span}(w_1) \implies (q^k - q)$ 种选择.
- $\ldots\ldots$
- $w_k \notin \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_{k-1}) \implies (q^k - q^{k-1})$ 种选择.

总数 M

每一个 k 维子空间，都有 M 组不同的有序基：

$$M = (q^k - 1)(q^k - q)(q^k - q^2) \cdots (q^k - q^{k-1})$$

第三步：结论与定义

根据双重计数的原理：

$$(\text{子空间总数}) \times (\text{每个子空间的基数}) = (\text{总有序无关组数})$$

第三步：结论与定义

根据双重计数的原理：

$$(\text{子空间总数}) \times (\text{每个子空间的基数}) = (\text{总有序无关组数})$$

因此：

$$\text{子空间总数} = \frac{N}{M},$$

即

$$\text{个数} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)\cdots(q^k - q^{k-1})}.$$

这个商就是 **高斯二项式系数** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 的定义.