

# 组合数学

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



## 第 2 章 排列与组合

- ① 加法原理与乘法原理
- ② 集合的排列
- ③ 集合的组合
- ④ 多重集合的排列
- ⑤ 多重集合的组合

# 排列与组合

- ① 加法原理与乘法原理
- ② 集合的排列
- ③ 集合的组合
- ④ 多重集合的排列
- ⑤ 多重集合的组合

# 加法原理

以下假设  $A$  和  $B$  是两类不同的、互不关联的事件。

## 定理 1.1

设事件  $A$  有  $m$  种选取方式，事件  $B$  有  $n$  种选取方式，则选  $A$  或  $B$  共有  $m + n$  种方式。

# 加法原理

以下假设  $A$  和  $B$  是两类不同的、互不关联的事件。

## 定理 1.1

设事件  $A$  有  $m$  种选取方式，事件  $B$  有  $n$  种选取方式，则选  $A$  或  $B$  共有  $m + n$  种方式。

用集合的语言可将加法原理叙述成以下定理：

## 定理 1.2

设  $A, B$  为有限集， $A \cap B = \emptyset$ ，则

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

### 例 1.1

从北京到上海可以乘飞机 (3 种方案), 或者火车 (5 种方案)。

问从北京到上海共几种方案?

## 定理 1.3

设事件  $A$  有  $m$  种选取方式，事件  $B$  有  $n$  种选取方式，那么选取  $A$  以后再选取  $B$  共有  $m \cdot n$  种方式。

# 乘法原理

## 定理 1.3

设事件  $A$  有  $m$  种选取方式, 事件  $B$  有  $n$  种选取方式, 那么选取  $A$  以后再选取  $B$  共有  $m \cdot n$  种方式。

用集合论的语言可将上述乘法原理叙述成如下的定理:

## 定理 1.4

设  $A, B$  是两个有限集合,  $|A| = m, |B| = n$ , 则

$$|A \times B| = |A| \times |B| = m \cdot n.$$

### 例 1.2

从北京到上海有 2 条路线，从上海到深圳有 5 条路线。  
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线？

### 例 1.3

求 1400 的不同的正因子个数。

### 例 1.2

从北京到上海有 2 条路线，从上海到深圳有 5 条路线。  
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线？

$$2 \times 5 = 10.$$

### 例 1.3

求 1400 的不同的正因子个数。

$$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7^1$$

正因子为： $2^i \times 5^j \times 7^k$ ，其中  $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 1$

共计  $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$

## 例 1.4

在  $0$  和  $10000$  之间有多少个整数恰好有一位数字是  $5$ ?

## 例 1.4

在 0 和 10000 之间有多少个整数恰好有一位数字是 5?

通过添加 0，把所有的数都看成是四位数，例如  $6=0006$ 。

假如第  $i$  位数是 5，则有  $9 \times 9 \times 9 = 729$  种可能。

共计  $4 \times 729 = 2916$

## 例 1.5

在 1000 和 9999 之间各位数字不同的奇数有多少个？

## 例 1.5

在 1000 和 9999 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

## 例 1.5

在 1000 和 9999 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序:

## 例 1.5

在 1000 和 9999 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 → 千位 → 百位 → 十位

### 例 1.5

在 1000 和 9999 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 → 千位 → 百位 → 十位

答案:  $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$

## 例 1.6

令  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是一个具有  $n$  元素的集合, 或简称  $n$  元集。  
再令  $2^S$  表示  $S$  的所有子集组成的集合, 称为幂集。求  $2^S$  的基数?

## 例 1.6

令  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是一个具有  $n$  元素的集合, 或简称  $n$  元集。  
再令  $2^S$  表示  $S$  的所有子集组成的集合, 称为幂集。求  $2^S$  的基数?

解: 令

$$\{0, 1\}^n = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ 或 } 1\}.$$

因为每个  $\varepsilon_i$  有两种可能的取值, 所以有

$$\#\{0, 1\}^n = 2^n.$$

定义映射  $\theta: 2^S \rightarrow \{0, 1\}^n$  为

$$\theta(T) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n),$$

其中

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_i \in T \\ 0, & \text{若 } x_i \notin T. \end{cases}$$

容易看出  $\theta$  是一个双射. 于是,  $\#2^S = 2^n$ .

# 排列与组合

- ① 加法原理与乘法原理
- ② 集合的排列
- ③ 集合的组合
- ④ 多重集合的排列
- ⑤ 多重集合的组合

# 集合的排列

## 定义 2.1

给定某个含有不同的元素集合  $S$ ，我们把它的元素排成一个线性序，使得每个元素恰好出现一次，叫做该集合的一个**排列** (*permutation*)。

以  $[n]$  表示  $n$  个正整数构成的集合  $\{1, 2, \dots, n\}$ ，那么  $[n]$  上的一个排列可以看成是  $[n]$  到自身的一个**双射**。

对于一个排列，我们可以用一行

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$$

来表示，其中  $\pi_i$  表示  $i$  的像。

我们来看一下  $n$  元集合的排列的个数。

## 定理 2.2

$n$  元集合上全部排列的个数为

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

注意，为方便起见，我们令  $0! = 1$ 。

## 例 2.1

集合  $[3]$  上的排列个数为  $3! = 6$ ，它们分别为

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

## 定义 2.3

令  $r$  为正整数，从含有  $n$  个元素的集合  $S$  中取出  $r$  个元素排成一个线性序，  
叫做一个  $r$ -排列。

### 定义 2.3

令  $r$  为正整数，从含有  $n$  个元素的集合  $S$  中取出  $r$  个元素排成一个线性序，叫做一个  $r$ -排列。

### 例 2.2

集合  $[3] = \{1, 2, 3\}$  上的 1-排列为

### 定义 2.3

令  $r$  为正整数，从含有  $n$  个元素的集合  $S$  中取出  $r$  个元素排成一个线性序，叫做一个  $r$ -排列。

### 例 2.2

集合  $[3] = \{1, 2, 3\}$  上的 1-排列为

1, 2, 3,

## 定义 2.3

令  $r$  为正整数，从含有  $n$  个元素的集合  $S$  中取出  $r$  个元素排成一个线性序，叫做一个  $r$ -排列。

## 例 2.2

集合  $[3] = \{1, 2, 3\}$  上的 1-排列为

1, 2, 3,

2-排列为

## 定义 2.3

令  $r$  为正整数，从含有  $n$  个元素的集合  $S$  中取出  $r$  个元素排成一个线性序，叫做一个  $r$ -排列。

## 例 2.2

集合  $[3] = \{1, 2, 3\}$  上的 1-排列为

1, 2, 3,

2-排列为

12, 13, 21, 23, 31, 32.

用  $P(n, r)$  表示  $n$  元集合的  $r$ -排列的数目。

如果  $r > n$ , 则  $P(n, r) = 0$ 。

### 定理 2.4

对于正整数  $n$  和  $r, r \leq n$ , 有

$$P(n, r) = n (n - 1) \cdots (n - r + 1).$$

记  $(n)_r = n (n - 1) \cdots (n - r + 1)$ , 称为  $n$  的  $(r$  阶)下阶乘。

### 例 2.3

将  $a, b, c, d, e, f$  进行排列, 问:

- (1) 使得字母  $b$  正好在字母  $e$  左邻的排列有多少种?
- (2) 使得字母  $b$  正好在字母  $e$  左边的排列有多少种?

### 例 2.3

将  $a, b, c, d, e, f$  进行排列, 问:

- (1) 使得字母  $b$  正好在字母  $e$  左邻的排列有多少种?
- (2) 使得字母  $b$  正好在字母  $e$  左边的排列有多少种?

### 例 2.4

从集合  $\{1, 2, \dots, 9\}$  中取出 7 个不同的数字组成 7 位数, 要求 5 和 6 不相邻, 问有多少不同的种?

### 例 2.4

从集合  $\{1, 2, \dots, 9\}$  中取出 7 个不同的数字组成 7 位数, 要求 5 和 6 不相邻, 问有多少不同的种?

所有的 7 位数  $P(9, 7) = \frac{9!}{2!} = 181440$

5 和 6 相继出现的 7 位数  $P(7, 5) \times P(6, 1) \times P(2, 1) = \frac{7!}{2!} \times 6 \times 2 = 30240$

共计  $181440 - 30240 = 151200$

# 圆排列

从  $n$  个不同的元素中取出  $r$  个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个圆排列。

## 定理 2.5

$n$  元集合的  $r$ -圆排列的个数为

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地， $n$  元集合的圆排列是  $(n-1)!$ .

## 例 2.5

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式？

# 圆排列

从  $n$  个不同的元素中取出  $r$  个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个圆排列。

## 定理 2.5

$n$  元集合的  $r$ -圆排列的个数为

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地， $n$  元集合的圆排列是  $(n-1)!$ .

## 例 2.5

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式？

答案： $(10-1)! - 2 \times (9-1)! = 282240$ .

### 例 2.6

7 个男生和 3 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻。  
问有多少种旋转排列方式？

### 例 2.6

7 个男生和 3 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻。  
问有多少种旋转排列方式？

答案： $(7 - 1)! \times P(7, 3) = 151200$ .

## 例 2.7

用 7 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链？

## 例 2.7

用 7 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链？

答案： $\frac{1}{2}(7 - 1)! = 360$

## 例 2.8

有 4 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种？

## 例 2.8

有 4 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡。不同的取法有多少种？

答案： $3! + 3 = 9$ .

提示：(错排问题) 把 4 位同学分别记为 1,2,3,4, 假设第  $i$  位同学拿到了第  $\pi_i$  位同学写的贺卡，则  $\pi_i \neq i$  对于所有的  $1 \leq i \leq 4$ . 于是，所求问题可以转化为求排列满足  $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ ，其中  $\pi_i \neq i$  对于  $1 \leq i \leq 4$  的个数.

然后，再考虑排列的圈表示，即求圈表示中不含 1-圈的排列的个数.

### 例 2.9 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

### 例 2.9 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

答案： $(4 - 1)! \times 2 = 12$ .

提示：先让女士就座，就座方式有  $(4 - 1)! = 6$  种，然后再让男士就座，只有 2 种可能。

# 排列与组合

- ① 加法原理与乘法原理
- ② 集合的排列
- ③ 集合的组合**
- ④ 多重集合的排列
- ⑤ 多重集合的组合

# 集合的组合

## 定义 3.1

$n$  元集合的  $k$ -组合是指从  $S$  中取出  $k$  个元素的一种无序选择, 也可以看作是  $S$  的一个  $k$  元子集。

## 例 3.1

若  $S = \{a, b, c, d\}$ , 则

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

是  $S$  的所有 2-组合。

用  $\binom{n}{k}$  表示  $n$  元集合的  $k$ -组合的个数，读作“ $n$  取  $k$ ”。

用  $\binom{n}{k}$  表示  $n$  元集合的  $k$ -组合的个数, 读作 “ $n$  取  $k$ ”。

显然, 当  $k > n$  时,  $\binom{n}{k} = 0$ .

### 定理 3.2

若  $0 \leq k \leq n$ , 则

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \stackrel{\text{why?}}{=} \binom{n}{k} \cdot k!$$

### 例 3.2

系里欲将 6 名保送研究生推荐给 3 个单位, 每个单位 2 名, 问有多少种方案?

### 例 3.3

从  $1, 2, \dots, 100$  中选出两个不同的数, 使其和为偶数, 问有多少种取法?

### 例 3.2

系里欲将 6 名保送研究生推荐给 3 个单位, 每个单位 2 名, 问有多少种方案?

### 例 3.3

从  $1, 2, \dots, 100$  中选出两个不同的数, 使其和为偶数, 问有多少种取法?

### 例 3.4

在平面上给出 25 个点, 任意三点不共线, 这些点可以确定多少条直线? 确定多少个三角形?

### 例 3.5

在一个凸  $n(n \geq 4)$  边形  $C$  的内部, 如果没有三条对角线共点, 求其全部对角线在  $C$  内部的交点的个数.

### 例 3.4

在平面上给出 25 个点, 任意三点不共线, 这些点可以确定多少条直线? 确定多少个三角形?

两点确定一条直线  $\binom{25}{2} = 300$ ,

三点确定一个三角形  $\binom{25}{3} = 2300$ .

### 例 3.5

在一个凸  $n(n \geq 4)$  边形  $C$  的内部, 如果没有三条对角线共点, 求其全部对角线在  $C$  内部的交点的个数.

四点确定一个四边形  $\binom{n}{4}$ .

### 例 3.6

如果要求每个“单词”包含 3, 4 或 5 个元音字母, 那么用 26 个英文字母可以构造多少个长度为 8 的“单词”? (字母使用次数无限制)

例如单词 *Andee* 使用了 3 个元音字母。

### 例 3.6

如果要求每个“单词”包含 3, 4 或 5 个元音字母, 那么用 26 个英文字母可以构造多少个长度为 8 的“单词”? (字母使用次数无限制)

例如单词 *Andee* 使用了 3 个元音字母。

$$3 \text{ 元音单词: } \binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5,$$

$$4 \text{ 元音单词: } \binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4,$$

$$5 \text{ 元音单词: } \binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3,$$

$$\text{共计: } \binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5 + \binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4 + \binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3.$$

### 例 3.7

一个俱乐部有 10 名男成员和 12 名女成员, 现从中选出 4 人组成一个委员会, 若要求:

(1) 至少要有 2 名女成员;

(2) 除 (1) 外, 又要求 A 先生和 B 女士不能同时入选。

分别求出有多少种不同的选法。

### 例 3.7

一个俱乐部有 10 名男成员和 12 名女成员, 现从中选出 4 人组成一个委员会, 若要求:

(1) 至少要有 2 名女成员;

(2) 除 (1) 外, 又要求 A 先生和 B 女士不能同时入选。

分别求出有多少种不同的选法。

解 (1) 设入选的女成员有  $i$  名, 那么入选的男成员就有  $4-i$  名, 其选法数为

$$\binom{12}{i} \binom{10}{4-i}$$

又  $2 \leq i \leq 4$ , 所以选法总数为

$$\binom{12}{2} \binom{10}{2} + \binom{12}{3} \binom{10}{1} + \binom{12}{4} \binom{10}{0} = 5665$$

(2) 从 (1) 中减去  $A$  先生和  $B$  女士同时入选的可能情况, 即为所求选法。

若  $A$  先生和  $B$  女士同时入选, 则另两名成员应从 9 名男士和 11 名女士中选出, 且至少选人一名女士, 与 (1) 类似, 其选法数为

$$\binom{11}{2} \binom{9}{0} + \binom{11}{1} \binom{9}{1} = 99 + 55 = 154.$$

因此, 共有  $5665 - 154 = 5511$  种选法。

另法 总方案数 =  $A, B$  二人都不入选方案数 +  $A$  人选  $B$  不入选方案数 +  $A$  不入选  $B$  入选方案数, 即总方案数为

$$\sum_{i=2}^4 \binom{11}{i} \binom{9}{4-i} + \sum_{i=2}^3 \binom{11}{i} \binom{9}{3-i} + \sum_{i=1}^3 \binom{11}{i} \binom{9}{3-i}$$

# 排列与组合

- ① 加法原理与乘法原理
- ② 集合的排列
- ③ 集合的组合
- ④ 多重集合的排列
- ⑤ 多重集合的组合

# 多重集合的排列

## 例 4.1

用 3 个  $A$ , 2 个  $B$ , 4 个  $C$ , 1 个  $D$  可以构成多少个长度为 10 的字符串?

# 多重集合的排列

## 例 4.1

用 3 个 A, 2 个 B, 4 个 C, 1 个 D 可以构成多少个长度为 10 的字符串?

**多重集**是元素可以重复出现的集合。

把某个元素  $a_i$  出现的次数  $k_i$ , 叫做该元素的重数。

通常把含有  $k$  个不同元素的多重集  $S$  记做

$$\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$$

或者

$$\{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_k^{k_n}\}.$$

# 多重集合的排列

用  $\binom{k_1+k_2+\dots+k_n}{k_1, k_2, \dots, k_n}$  表示多重集合  $\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$  的全排列个数。

先把  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  个元素看成是互不相同的，

但这里  $k_i$  个  $a_i$  是相同的，只要两个排列中这些  $a_i$  的位置相同，就可以视为相同的多重集的排列。

## 定理 4.1

$$\binom{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

## 例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法？

### 例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法？

$$\binom{11}{1, 2, 4, 4} = 34650$$

### 例 4.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 *S*，问有多少种排法？

### 例 4.2

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法？

$$\binom{11}{1, 2, 4, 4} = 34650$$

### 例 4.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续四个 *S*，问有多少种排法？

$$\binom{11}{1, 2, 4, 4} - \binom{8}{1, 1, 2, 4} = 33810$$

#### 例 4.4

考虑 例1.6 中定义的双射  $\theta: 2^S \rightarrow \{0, 1\}^n$ 。集合  $S$  上的  $k$  元子集 与多重集  $\{(n - k) \cdot 0, k \cdot 1\}$  的排列一一对应。

#### 例 4.4

考虑 例1.6 中定义的双射  $\theta: 2^S \rightarrow \{0, 1\}^n$ 。集合  $S$  上的  $k$  元子集 与多重集  $\{(n - k) \cdot 0, k \cdot 1\}$  的排列一一对应。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{n - k, k}$$

### 例 4.5 (格路计数问题)

在平面上有多少从  $(0,0)$  到  $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  点的格路径，其每一步都具有形式  $(1,0)$  或  $(0,1)$ （即每一步向东或向北走一个单位距离）。



图: 格路

### 例 4.5 (格路计数问题)

在平面上有多少从  $(0,0)$  到  $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  点的格路径，其每一步都具有形式  $(1,0)$  或  $(0,1)$ （即每一步向东或向北走一个单位距离）。



图: 格路

其与多重集  $\{m \cdot E, n \cdot N\}$  的排列一一对应。

### 例 4.6

从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人，副队长 1 人，普通队员 2 人组成 4 人服务队，要求服务队中至少有 1 名女生，共有多少种不同的选法？

### 例 4.6

从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人，副队长 1 人，普通队员 2 人组成 4 人服务队，要求服务队中至少有 1 名女生，共有多少种不同的选法？

先选出 4 人： 3 男 1 女 或 2 男 2 女

再考虑多重集合  $\{1 \cdot \text{队长}, 1 \cdot \text{副队长}, 2 \cdot \text{普通队员}\}$  的排列，比如

$$\begin{pmatrix} \text{张三} & \text{李四} & \text{王五} & \text{赵六} \\ \text{队长} & \text{队员} & \text{副队长} & \text{队员} \end{pmatrix}$$

共计  $((\binom{6}{3}\binom{2}{1}) + (\binom{6}{2}\binom{2}{2})) \times \binom{4}{1,1,2} = (40 + 15) \times 12 = 660$ .

该题来自 2017 年浙江高考。

### 例 4.7

在由四个 0 和八个 1 组成的序列  $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$  中, 没有两个连续 0 的序列有多少个?

### 例 4.7

在由四个 0 和八个 1 组成的序列  $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$  中, 没有两个连续 0 的序列有多少个?

插空法  $\binom{8+1}{4} = 126$

### 例 4.8

将 6 个蓝球、5 个红球、4 个白球、3 个黄球排成一行, 要求黄球不挨着, 问有多少种排列方式?

### 例 4.8

将 6 个蓝球、5 个红球、4 个白球、3 个黄球排成一行, 要求黄球不挨着, 问有多少种排列方式?

先将蓝、红、白三种球进行全排列, 再将 3 个黄球 $\square$ 入其中.

令  $M = \{6 \cdot b, 5 \cdot r, 4 \cdot w\}$ , 则  $M$  的全排列数为  $\frac{15!}{6!5!4!}$ .

每个 “\*” 表示  $M$  的一个全排列中的一个元素, 共有 15 个 “\*”, 则可以在 16 个 “ $\triangle$ ” 所示位置中选出 3 个插入 3 个黄球, 共有  $\binom{16}{3}$  种取法.

所以, 共有  $\frac{15!}{6!5!4!} \cdot \binom{16}{3}$  种排列方法.

# 排列与组合

- ① 加法原理与乘法原理
- ② 集合的排列
- ③ 集合的组合
- ④ 多重集合的排列
- ⑤ 多重集合的组合**

## 引例

一家面包房生产 8 种炸面包圈。如果将一打 (12 个) 炸面包圈装进盒内, 则一共有多少种不同的盒装组合?

## 引例

求

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的个数。

## 引例

将  $r$  个相同的小球放入  $n$  个不同的盒子中, 要求每个盒子小球的个数不受限制, 有多少种方法?

# 多重集合的组合

假定  $n$  个不同物体中的每一个都可以被重复选取任意多次。

用  $\binom{n}{r}$  表示从

$$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$$

选取基数为  $r$  的多重集的方法数。

设元素  $a_i$  出现  $x_i$  次。该问题等价于求

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

的非负整数解的个数。

这相当于，将  $r$  个相同的小球放入  $n$  个不同的箱子中（即将  $r$  个相同的小球排成一排，然后在小球中间插入  $n - 1$  个隔板，隔板将小球分成了  $n$  份）

因此，原问题转化为多重集合  $\{r \cdot \circ, (n - 1) \cdot | \}$  的排列数。

所以， $\binom{n}{r} = \binom{n+r-1}{r}$ 。

## 例 5.1

一家面包房生产 8 种炸面包圈。

- i) 如果将一打 (12 个) 炸面包圈装进盒内, 则一共有多少种不同的盒装组合?
- ii) 若每盒必定包含所有的 8 种炸面包圈呢?

## 例 5.1

一家面包房生产 8 种炸面包圈。

- i) 如果将一打 (12 个) 炸面包圈装进盒内, 则一共有多少种不同的盒装组合?
- ii) 若每盒必定包含所有的 8 种炸面包圈呢?

$$\text{i) } \binom{8}{12} = \binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12}, \quad \text{ii) } \binom{8}{4} = \binom{12-1}{4} = \binom{11}{4}$$

## 例 5.2

方程  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

- i) 非负整数解有多少个？
- ii) 正整数解有多少个？

## 例 5.2

方程  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个？

ii) 正整数解有多少个？

i)  $\binom{n}{r} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$ ,

ii) 法一：把  $r$  个相同的小球放入  $n$  个不同的盒子，要求每个盒子非空。这相当于，将  $r$  个相同的小球排成一列，然后在小球之间插入  $n-1$  个隔板将小球分成了  $n$  份，每一份的数量都要大于或等于 1，对应上述方程的一组正整数解。



也就是说，从  $r-1$  个位置挑出  $n-1$  个位置，用于放置隔板，即  $\binom{r-1}{n-1}$ 。

法二：令  $y_i = x_i - 1$ ，则问题转化为方程  $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r - n$  的非负整数解的个数，即  $\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$ 。

### 例 5.3

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的满足

$$x_1 \geq 4, x_2 \geq 2, x_3 \geq -1, x_4 \geq 0$$

的整数解有多少个？

### 例 5.3

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的满足

$$x_1 \geq 4, x_2 \geq 2, x_3 \geq -1, x_4 \geq 0$$

的整数解有多少个？

我们引入新变量  $y_1 = x_1 - 4, y_2 = x_2 - 2, y_3 = x_3 + 1, y_4 = x_4$ .

原问题变为方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$$

的非负整数解的个数  $\binom{4+15-1}{4-1} = \binom{18}{3} = 816$ .

# Balls in boxes

I will tell you shamelessly what my bottom line is: **It is placing balls into boxes.**

— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

## 例 5.4

- i) 将  $r$  个相同的小球放入  $n$  个不同的盒子中，有多少种方法？
- ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法？

# Balls in boxes

I will tell you shamelessly what my bottom line is: **It is placing balls into boxes.**

— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

## 例 5.4

- i) 将  $r$  个相同的小球放入  $n$  个不同的盒子中, 有多少种方法?
- ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球, 有多少种方法?

方程  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

- i) 非负整数解
- ii) 正整数解

对  $\binom{n}{r} = \binom{n+r-1}{r}$  的一个直接的组合证明如下。

令

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leq n + r - 1$$

为  $[n + r - 1]$  的一个  $r$  元子集。令  $b_i = a_i - i + 1$ , 则  $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$  是  $[n]$  的一个  $r$  元重集。

反之, 给定  $[n]$  上的一个  $r$  元重集

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_r \leq n,$$

定义  $a_i = b_i + i - 1$ , 则  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  是  $[n + r - 1]$  的  $r$  元子集。

这样就定义了  $[n]$  的  $r$  元重集与  $[n + r - 1]$  的  $r$  元子集之间的双射。

# 多重集合的组合数（有重数限制）

令

$$S = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$$

是一个多重集，多重集合的  $r$ -组合数的计数问题更为困难。等价于方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

的整数解的个数，其中  $0 \leq x_1 \leq k_1, 0 \leq x_2 \leq k_2, \dots, 0 \leq x_n \leq k_n$ .

将在后面的课程中解决该问题。

# 补充题

- ① 集合  $[10] = \{1, 2, \dots, 10\}$  有多少个至少包含一个奇数的子集？
- ② 将十个人分成五组，每组两人，不考虑分组顺序，这样的分法有多少种？
- ③ 计算满足  $\pi_1 \neq 2$  的 6 阶排列  $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$  的个数。
- ④ 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈？(不动点可以认为是长为 1 的圈)

## 补充题

- ① 集合  $[10] = \{1, 2, \dots, 10\}$  有多少个至少包含一个奇数的子集？
  - ② 将十个人分成五组，每组两人，不考虑分组顺序，这样的分法有多少种？
  - ③ 计算满足  $\pi_1 \neq 2$  的 6 阶排列  $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$  的个数。
  - ④ 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈？(不动点可以认为是长为 1 的圈)
- 
- ①  $2^{10} - 2^5 = 992$
  - ②  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$
  - ③  $5 \cdot 5! = 600$  (或者  $6! - 5! = 600$ )
  - ④  $\binom{6}{1}4! + \binom{6}{2}3! + \frac{1}{2}\binom{6}{3}2!^2 = 274$

### 例 5.5

把集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  划分成  $b_1$  个 1 元集,  $b_2$  个 2 元集,  $\dots$ ,  $b_k$  个  $k$  元集, 其中  $\sum_{i=1}^k ib_i = n$ , 这样的分法有多少种?

### 例 5.5

把集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  划分成  $b_1$  个 1 元集,  $b_2$  个 2 元集,  $\dots$ ,  $b_k$  个  $k$  元集, 其中  $\sum_{i=1}^k i b_i = n$ , 这样的分法有多少种?

**解** 从排列数出发.  $n$  个元素的全排列有  $n!$  种. 而对于每个划分, 其中  $b_i$  个  $i$  元集是没有顺序的, 且划分中每个集合的元素也是没有顺序的, 因此每个划分对应  $b_1! b_2! \cdots b_k! (1!)^{b_1} (2!)^{b_2} \cdots (k!)^{b_k}$  个不同的  $n$ -排列. 所以答案为

$$\frac{n!}{b_1! b_2! \cdots b_k! (1!)^{b_1} (2!)^{b_2} \cdots (k!)^{b_k}}$$

**法二** 从多重选取数出发, 再考虑到划分得到的  $i$  元集彼此之间是没有顺序的, 则有

$$\frac{1}{b_1! b_2! \cdots b_k!} \binom{n}{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, k, \dots, k}$$

种分法, 这和上面的答案一样. (以上多重选取公式中的  $i$  有  $b_i$  个,  $1 \leq i \leq k$ .)

## 例 5.6

记集合  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . 由  $[n]$  到其自身的双射 (即  $n$  元置换) 全体在映射合成下做成一个群, 即  $n$  元对称群  $S_n$ , 其中任一置换  $\sigma$  均可表为  $S_n$  中一些互不相交 (即两两无公共元素) 的轮换之积, 且这种表示方式在不考虑轮换次序的意义下唯一, 称为  $\sigma$  的轮换分解. 对  $\sigma \in S_n$ , 用  $l_i(\sigma)$  表示  $\sigma$  的轮换分解中长为  $i$  的轮换个数, 则称  $(l_1(\sigma), l_2(\sigma), \dots, l_n(\sigma))$  为  $\sigma$  的轮换型号, 记为  $\text{type}(\sigma)$ . 若  $1l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = n$ , 则  $S_n$  中轮换型号为  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$  的置换有多少个?

### 例 5.6

记集合  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . 由  $[n]$  到其自身的双射 (即  $n$  元置换) 全体在映射合成下做成一个群, 即  $n$  元对称群  $S_n$ , 其中任一置换  $\sigma$  均可表为  $S_n$  中一些互不相交 (即两两无公共元素) 的轮换之积, 且这种表示方式在不考虑轮换次序的意义下唯一, 称为  $\sigma$  的轮换分解. 对  $\sigma \in S_n$ , 用  $l_i(\sigma)$  表示  $\sigma$  的轮换分解中长为  $i$  的轮换个数, 则称  $(l_1(\sigma), l_2(\sigma), \dots, l_n(\sigma))$  为  $\sigma$  的轮换型号, 记为  $\text{type}(\sigma)$ . 若  $1l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = n$ , 则  $S_n$  中轮换型号为  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$  的置换有多少个?

解 与上例方法类似, 知所求结果为

$$\frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_n!(1!)^{l_1}(2!)^{l_2}\cdots(n!)^{l_n}} \cdot \prod_{i=1}^n ((i-1)!)^{l_i} = \frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_n!1^{l_1}2^{l_2}\cdots n^{l_n}}.$$

此即 Cauchy 公式.