组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

组合数学

组合数学主要是研究离散对象满足一定条件的安排的存在性、计数及设计等问题的学科. 目前主要有以下领域:

- 计数组合学: 利用生成函数、Mobius 反演、Pólya 计数定理等研究排列的计数、树的计数以及其他特殊集合的计数.
- 代数组合学: 利用代数工具研究组合问题, 包括对称多项式理论、群表示理论、杨表理论等.
- 组合数学机械化: 从 WZ 方法出发, 研究组合恒等式机械证明的理论和快速算法.

教材

- 金应烈, 郭强辉, 孙慧, 组合数学, 高等教育出版社, 2024 年.

参考文献

1. 许胤龙、孙淑玲, 组合数学引论, 中国科学技术大学出版社, 2010 年第 2 版.
2. 冯荣权、宋春伟, 组合数学, 北京大学出版社, 2015 年第 1 版.
3. Miklos Bona, Introduction to Enumerative Combinatorics, McGraw-Hill, 2005.
4. Richard Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2011.
5. Richard A.Brualdi, Introductory Combinatorics (5th Edition),Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 2012.

问题 1

唐代的都城长安气象升平，街道整齐划一．其外郭城以朱雀大街为中轴街，十一条东西向大街和十四条南北向大街将外郭城分割为若干个坊．某位喜欢思考的小吏每天上班需要横竖各自穿越五条大街才能恰好到达．若每条街和每条路的交叉点都可以自由穿行，且该小吏出于忌讳不愿穿过起点和终点的直接连线，即自然形成的 5×5 方格盘的对角线．那么他可以在连续多少天内不重复路线，也不绕远地上班？

意大利数学家 Fibonacci 在 13 世纪提出了如下的一个问题:

问题 2

把一对兔子（雌雄各一只）在某年的开始放到围栏中，每个月的开始这对兔子都产生一对小兔子，其中雌雄各一只. 每对新生小兔间隔一个月后也开始每月都产下一对雌雄各一的小兔. 假定兔子都不死亡，一年后围栏中会有多少对兔子?

意大利数学家 Fibonacci 在 13 世纪提出了如下的一个问题:

问题 2

把一对兔子(雌雄各一只)在某年的开始放到围栏中, 每个月的开始这对兔子都产生一对小兔子, 其中雌雄各一只. 每对新生小兔间隔一个月后也开始每月都产下一对雌雄各一的小兔. 假定兔子都不死亡, 一年后围栏中会有多少对兔子?

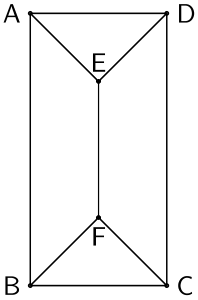
著名的 Fibonacci 数列由此而得名. 若设 f_n 表示第 n 个月所有的兔子对数, 则我们不难得出如下递推关系式:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 1).$$

问题 3 (2010, 天津高考)

如图, 用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且图中每条线段的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有多少种?

A. 288　　*B. 264*　　*C. 240*　　*D. 108*



问题 4

1 与 *1000* 之间不能被 *5,6,8* 整除的整数有多少个?

问题 5

n 对夫妇参加宴会围桌就座, 要求男女相间并且每对夫妇两人不得相邻, 问有多少种就座方式?

问题 6

由 *5* 个字母 a, b, c, d, e 构成的全排列中, a 不能出现在 $1, 5$ 位置上, b 不能出现在 $2, 3$ 位置上, c 不能出现在 $3, 4$ 位置上, e 不能出现在 5 位置上. 问有多少种排列方法?

问题 7

证明任意 n^2+1 个实数组成的序列中，必有一个长为 $n+1$ 的递增子序列，或必有一个长为 $n+1$ 的递减子序列.

整数分拆

正整数 n 的一个(无序) 分拆(Partitions) λ 是指一个单调不增的正整数序列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, 满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n.$$

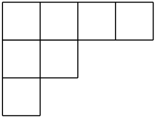
例如, $n = 4$ 的所有分拆为

$$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1).$$

杨表

杨表 (Young tableau) 是由杨（R.A. Young）在 1901 年研究不变量理论时引入的, 它在组合数学、群表示论、数学物理等领域中都有重要应用. 通常情况下, 杨表是指定义在杨图上的半标准杨表.

给定一个整数分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, 与 λ 对应的杨图 (Young Diagram) 定义为平面上一些左对齐的 k 行方块的集合, 使得第 i 行恰有 λ_i 个方块. 例如, 分拆 $(4, 2, 1)$ 对应的杨图为



标准杨表

设 λ 是 n 的一个分拆. 在 λ 对应的杨图中, 用正整数填充图中的每个方块得到一个阵列 T. 若用 $1, 2, \ldots, n$ 填充 λ 对应的杨图使得每个数字恰好出现一次, 并且每行每列递增, 则称这样的阵列为具有形状 λ 的标准杨表 SYT（standard Young tableau）. 例如下图是一个形状为 $(4, 2, 1)$ 的标准杨表.

1	3	6	7
2	5		
4			

问题 8

标准杨表 (SYT) 的个数

Thanks for your attention!