组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

组合数学

组合数学主要是研究离散对象满足一定条件的安排的存在性、计数及设计等问题的学科. 目前主要有以下领域:

- 计数组合学: 利用生成函数、Mobius 反演、Pólya 计数定理等研究排列的计数、树的计数以及其他特殊集合的计数.
- 代数组合学: 利用代数工具研究组合问题, 包括对称多项式理论、群表示理论、杨表理论等.
- 组合数学机械化: 从 WZ 方法出发, 研究组合恒等式机械证明的理论和快速算法.

教材

- 金应烈，郭强辉，孙慧，组合数学，高等教育出版社，2024 年.

参考文献

1 许胤龙、孙淑玲，组合数学引论，中国科学技术大学出版社，2010 年第 2 版.

2 冯荣权、宋春伟，组合数学，北京大学出版社，2015 年第 1 版.

3 Miklos Bona, Introduction to Enumerative Combinatorics, McGraw-Hill, 2005.

4 Richard Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 1, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2011.

5 Richard A.Brualdi, Introductory Combinatorics (5th Edition),Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 2012.

问题 1

唐代的都城长安气象升平，街道整齐划一．其外郭城以朱雀大街为中轴街，十一条东西向大街和十四条南北向大街将外郭城分割为若干个坊．某位喜欢思考的小吏每天上班需要横竖各自穿越五条大街才能恰好到达．若每条街和每条路的交叉点都可以自由穿行，且该小吏出于忌讳不愿穿过起点和终点的直接连线，即自然形成的 5×5 方格盘的对角线．那么他可以在连续多少天内不重复路线，也不绕远地上班？

意大利数学家 Fibonacci 在 13 世纪提出了一个经典问题：

问题 2

将一对雌雄各一的兔子在年初放入围栏中. 从第二个月开始，每对成年兔子每月初都会产下一对雌雄各一的小兔子. 每对新生小兔生长一个月后也会开始每月产下一对雌雄各一的小兔. 假设所有兔子都不会死亡，那么一年后围栏中共有多少对兔子？

意大利数学家 Fibonacci 在 13 世纪提出了一个经典问题:

问题 2

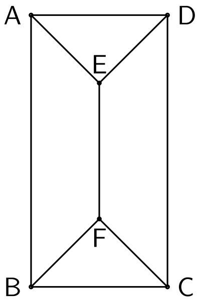
将一对雌雄各一的兔子在年初放入围栏中. 从第二个月开始, 每对成年兔子每月初都会产下一对雌雄各一的小兔子. 每对新生小兔生长一个月后也会开始每月产下一对雌雄各一的小兔. 假设所有兔子都不会死亡, 那么一年后围栏中共有多少对兔子?

这个问题引出了著名的 Fibonacci 数列. 设 f_n 表示第 n 个月围栏中的兔子对数, 则可以推导出如下递推关系式: $f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 1)$.

问题 3 (2010, 天津高考)

如图，用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色，要求每个点涂一种颜色，且图中每条线段的两个端点涂不同颜色，则不同的涂色方法有多少种？

A. 288　　*B.* 264　　*C.* 240　　*D.* 108



问题 4

1 与 *1000* 之间不能被 *5,6,8* 整除的整数有多少个?

问题 5

n 对夫妇参加宴会围桌就座, 要求男女相间并且每对夫妇两人不得相邻, 问有多少种就座方式?

问题 6

由 5 个字母 a, b, c, d, e 构成的全排列中, a 不能出现在 $1, 5$ 位置上, b 不能出现在 $2, 3$ 位置上, c 不能出现在 $3, 4$ 位置上, e 不能出现在 5 位置上. 问有多少种排列方法?

问题 7

证明任意 n^2+1 个实数组成的序列中, 必有一个长为 $n+1$ 的递增子序列, 或必有一个长为 $n+1$ 的递减子序列.

整数分拆

核心问题

如何将一个正整数 n 拆分成若干个正整数之和？

这种拆分方式，我们称之为整数分拆.

定义：正整数 n 的一个(无序) 分拆 λ，是指一个单调不增的正整数序列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$，满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n.$$

注意：由于是无序分拆，$(3, 1)$ 和 $(1, 3)$ 视为同一种分拆.

示例：$n = 4$ 的所有分拆为

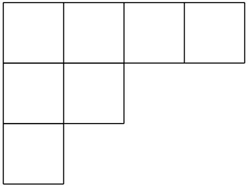
$$(4),\ (3, 1),\ (2, 2),\ (2, 1, 1),\ (1, 1, 1, 1).$$

杨图

每一个整数分拆都对应一个独特的几何图形——杨图.

定义：给定一个整数分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$，其对应的杨图是由 k 行左对齐的方块组成，其中第 i 行恰好有 λ_i 个方块.

示例：分拆 $(4, 2, 1)$ 对应的杨图为：



杨图是连接整数分拆与表示论的桥梁，由数学家杨于 1901 年引入.

在杨图的基础上，我们可以用数字填充其方块，形成杨表.

定义：设 λ 是 n 的一个分拆. 用 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 填充其杨图，若满足：

- 每个数字恰好出现一次；
- 每一行从左到右严格递增；
- 每一列从上到下严格递增，

则称得到的阵列为具有形状 λ 的标准杨表 (SYT).

示例：一个形状为 $(4, 2, 1)$ 的标准杨表：

1	3	6	7
2	5		
4			

思考

对于一个给定的分拆 λ，其标准杨表的总数是多少？

Thanks for your attention!